Семинар 1

Семинара Задачи

Задача 1, Сложность 1

Имеются две одинаковые монеты. На одной стороне каждой из них написан 0, а на другой 1. Монеты подбросили и посчитали сумму выпавших очков. Затем повторили бросок. Какова вероятность, что получилась такая же сумма очков, если

a. монеты различимы?
b. монеты неразличимы (бозонные)?

Решение

Пусть S_1, S_2 — сумма результатов первого и второго подбрасывания. Нам нужно найти $\mathbb{P}(S_1 = S_2) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(S_1 = k)^2$.

a. Для различимых монет пространство элементарных исходов — это $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, где каждый исход имеет вероятность $1/4$. Вероятности для сумм: $\mathbb{P}(S=0) = 1/4$, $\mathbb{P}(S=1) = 1/2$, $\mathbb{P}(S=2) = 1/4$. $\mathbb{P}(\text{та же сумма}) = (1/4)^2 + (1/2)^2 + (1/4)^2 = 6/16 = 3/8$.

b. Для неразличимых (бозонных) монет пространство элементарных исходов — это множество исходов $\{\{0,0\},\{0,1\},\{1,1\}\}$. Предполагая, что они равновероятны, каждый имеет вероятность $1/3$. Вероятности для сумм: $\mathbb{P}(S=0) = 1/3$, $\mathbb{P}(S=1) = 1/3$, $\mathbb{P}(S=2) = 1/3$. $\mathbb{P}(\text{та же сумма}) = (1/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 = 3/9 = 1/3$.

Задача 2, Сложность 1

Вместе с другими студентами вы сдаете экзамен. Число студентов равно числу билетов и составляет n. Известно, что среди билетов имеется $1 \leq k \leq n$ простых. Студенты заходят в аудиторию по очереди, тянут билет и оставляют его себе. Когда вам выгоднее всего зайти, чтобы максимизировать вероятность вытянуть простой билет? Чтобы разобраться в этом животрепещущем вопросе, вычислите вероятность вытянуть простой билет, если вы заходите

a. первым;
b. j-ым, $1 \leq j \leq n$.

Решение

По симметрии (инвариантность вероятности каждой последовательности простых/сложных задач относительно перестановок), вероятность не зависит от позиции.

a. Для первого студента вероятность очевидно равна k/n.
b. Любой из n билетов равновероятно может оказаться на j-й позиции. Поскольку k из них простые, вероятность равна k/n. Время входа не имеет значения.

Задача 3, Сложность 3

Рассматривается случайное размещение n неразличимых (бозонных) частиц по M различимым ячейкам. Вычислите вероятность $Q_k(n; M)$ того, что в фиксированной ячейке содержится k частиц.

Найдите предел $Q_k(n; M)$, когда $n, M \to \infty$ таким образом, что $n/M \to \lambda$, где $\lambda > 0$ фиксировано.

Примечание: Такое распределение называется "статистикой Бозе-Эйнштейна"; оно описывает распределение бозонов по уровням энергии и дает физическое обоснование модели, в которой неразличимые предметы размещаются в различимых контейнерах.

Решение

Общее число конфигураций равно $\binom{n+M-1}{n}$. Если мы зафиксируем, что в одной ячейке находится k частиц, мы должны распределить оставшиеся $n-k$ частиц по остальным $M-1$ ячейкам. Количество способов это сделать равно $\binom{(n-k)+(M-1)-1}{n-k} = \binom{n-k+M-2}{n-k}$.

$$Q_k(n;M) = \frac{\binom{n-k+M-2}{n-k}}{\binom{n+M-1}{n}}$$

В пределе эта вероятность сходится к геометрическому распределению с параметром $p = \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

$$\lim_{n,M\to\infty} Q_k(n;M) = (1-p)p^k = \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k$$

Задача 4, Сложность 2

Имеется код длины n, состоящий из цифр от 0 до 9. Найти вероятность того, что цифры расположены в неубывающем порядке.

Решение

Общее число кодов равно 10^n. Неубывающая последовательность определяется мультимножеством её цифр. Число таких мультимножеств размера n из 10 цифр равно $\binom{n+10-1}{n} = \binom{n+9}{n}$.

$$\mathbb{P}(\text{неубывающая}) = \frac{\binom{n+9}{n}}{10^n}$$

Задача 5, Сложность 1

Из колоды (52 карты) вынимают 4 карты.

a. Какова вероятность, что все 4 карты — пики?
b. Какова вероятность, что 3 карты — пики, а одна — черви?

Задача 6, Сложность 3

Имеется три пронумерованных ящика (1,2,3), по ним случайным образом разложены 10 неразличимых (бозонных) белых шаров и 4 пронумерованных красных шара (1,2,3,4). Найдите вероятность того, что в каждом ящике есть хотя бы один белый шар и хотя бы один красный шар с номером, большим номера ящика.

Задача 7, Сложность 3

Имеется три ящика, в них случайным образом лежат три черных и три белых шара. Найдите вероятность того, что в первом ящике лежит не менее двух черных шаров, а в третьем — не более одного белого, если

a. шары пронумерованы
b. шары отличаются только цветом (бозонные).

Задача 8, Сложность 2

Имеется ящик с 30 различимыми шарами, среди которых 10 красных и 20 черных шаров. Наугад вынимают 12 (без учета порядка и без возвращения). Найдите вероятность того, что среди вынутых шаров оказалось поровну красных и черных. Что изменится, если учитывать порядок?

Задача 9, Сложность 3

Так работает (одномерная) линия передачи сотовой сети. n антенн выстроены в линию на равном расстоянии, каждая повторяет сигнал, полученный от соседней антенны. Сигнал может преодолевать расстояние двух антенн, поэтому передача работает, если нет двух последовательных неисправных антенн. Предположим, что $m < n$ антенн неисправны, но мы не знаем их положения. Какова вероятность того, что трансмиссия сработает?

- IIXIIIXI = работает
- IIXXIIII = не работает

Задача 10, Сложность 3

Человек многократно подбрасывает монету. Он останавливается, как только получает последовательность из n орлов или последовательность из 1 решки и $(n-1)$ орлов подряд.

a. Какова вероятность, что он остановится?
b. Какова вероятность, что он остановится на последовательности из n орлов?

Задача 11, Сложность 4

Электричка состоит из n вагонов. Каждый из k пассажиров выбирает вагон наудачу. Какова вероятность, что в каждом вагоне будет хотя бы один пассажир? Какова вероятность, что будут заняты ровно r вагонов?

Задача 12, Сложность 4

Пассажиры в автобусе рассаживаются случайным образом, не обращая внимания на места, указанные в билете. Число пассажиров равно числу мест. Какова вероятность, что ни один не сядет на свое место?

Задача 13, Сложность 3

Человек одновременно купил две коробки спичек и положил их в карман. После этого каждый раз, когда ему нужно было зажечь спичку, он доставал наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время, вытащив одну из коробок, человек обнаружил, что она пуста. Какова вероятность, что в другой коробке в этот момент находилось k спичек, если число спичек в новой коробке равно n?

Задача 14, Сложность 3

По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 2$, выбираются числа ξ и η. Покажите, что

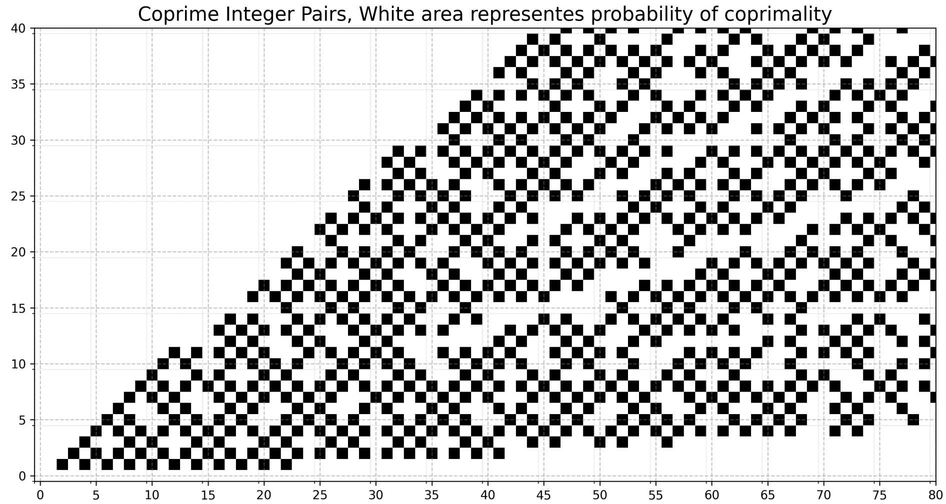
$$\mathbb{P}\left(\xi^2 - \eta^2 \text{ кратно } 2\right) < \mathbb{P}\left(\xi^2 - \eta^2 \text{ кратно } 3\right)$$

Задача 15, Сложность 4

По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 3$, выбираются числа ξ и η. Что больше, $\mathbb{P}\left(\xi^3 + \eta^3 \text{ кратно } 3\right)$ или $\mathbb{P}\left(\xi^3 + \eta^3 \text{ кратно } 7\right)$?

Задача 16, Сложность 5

По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, \ldots, N\}$ выбираются числа ξ и η. Найти вероятность q_N того, что ξ и η взаимно просты. Найти $\lim_{N\to\infty} q_N$.



Избранные Задачи

Задача 17, Сложность 2

200 студентов, изучающих теорию вероятностей, делятся на три группы по 50, 50 и 100 человек для посещения семинаров в аудиториях соответствующей вместимости.

a. Сколькими способами можно сформировать эти группы студентов?

Александра и Светлана — хорошие подруги и хотели бы оказаться в одной аудитории во время семинара. Но они терпеть не могут Алексея и надеются, что его распределят в другую аудиторию.

b. Какова вероятность, что их желания исполнятся?

Задача 18, Сложность 5

В урне находятся u_1 шаров цвета 1, u_2 шаров цвета 2, ..., u_R шаров цвета R. Мы производим n случайных извлечений, и сразу после каждого извлечения шар возвращается в урну вместе с m другими шарами того же цвета ($m \geq -1$ и $n \leq u_1 + ... + u_R$, если $m = -1$).

a. Какова вероятность того, что на i-м извлечении будет вытянут шар цвета r?
b. Какова вероятность того, что среди n выбранных шаров цвет 1 встретится j_1 раз, цвет 2 — j_2 раз, ..., цвет R — j_R раз?
c. Пусть $u_1 = u_2 = ... = u_R = u$. Вычислите предыдущую вероятность в следующих случаях: $m = -1$ (извлечение без возвращения); $m = 0$ (извлечение с возвращением).