Семинар 2

Задача 1

1) Верно ли равенство $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(B \cup C|A)$?
2) Привести примеры, показывающие, что следующие равенства, вообще говоря, неверны:
   a) $\mathbb{P}(A|B \cup C) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C)$
   b) $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) = 1$

Задача 2

Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и события $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ имеют положительные вероятности. Обозначим $\mathbb{P}_{H_i} := \mathbb{P}(\cdot|H_i)$, $i = 1, 2$. Докажите, что

$$\mathbb{P}_{H_1}(\cdot|H_2) = \mathbb{P}(\cdot|H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(\cdot|H_1).$$

То есть, для любого $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}_{H_1}(A|H_2) = \mathbb{P}(A|H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(A|H_1).$$

Задача 3

Колоду из 52 карт раздают на 4 игроков. Один из игрока объявляет, что у него есть туз.

a) Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз?
b) Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз, если он объявил, что у него есть туз пик?

Сперва решите эту задачу напрямую, не используя понятие условной вероятности (переопределяя множество элементарных исходов), а затем по определению условной вероятности.

Задача 4

Из множества $\{1, 2, ..., n\}$ без возвращения по очереди выбирают три различных числа. Найдите условную вероятность того, что третье число лежит между первым и вторым, при условии, что первое число меньше второго.

Задача 5

(а) В мешке лежали один шар белого и один шар чёрного цвета. Из него извлекли один шар и положили в пустой ящик. Также в ящик положили ещё один белый шар. Наконец, из ящика извлекли один шар, он оказался белым. Какова вероятность того, что оставшийся в~ящике шар тоже белый?

(б) Решите предыдущую задачу в предположении, что исходно в мешке было 10 черных и 7 белых шаров.

Задача 6

(Урновая схема Пойа) В урне находятся a белых и b черных шаров. Выполняем n случайных извлечений и сразу после каждого извлечения шар возвращается в урну вместе с m других шарами того же цвета. ($m \geq -1$ и $n \leq a+b$ если $m = -1$).

a) Какова вероятность, что из $n = n_1 + n_2$ выбранных шаров белых шаров будет n_1, а черных n_2?
b) Докажите, что вероятность извлечь на i-м шаге белый шар равна $a/(a+b)$.

Задача 7

(Парадокс Монти Холла). Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор? Уточнения: автомобиль равновероятно размещён за любой из трёх дверей; ведущий знает, где находится автомобиль; вне зависимости

от того какую вы выбрали дверь, ведущий в любом случае обязан открыть дверь с козой (но не ту, которую вы выбрали) и предложить изменить выбор; если у ведущего есть выбор, какую из двух дверей открыть (то есть, вы указали на верную дверь, и за обеими оставшимися дверями — козы), он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью.

Задача 8

Ковид снова в моде! Но и британские учёные не спят: разработан новый тест, имеющий чувствительность 99% (т.е. верно диагностирует больного в 99% случаев) и специфичность 99% (лишь 1% здоровых людей объявляет больными). Известно, что в одной счастливой деревне ковидом страдает 1 человек из ее 1000 жителей. Какова вероятность того, что житель этой деревни, объявленный больным по результатам теста, действительно болен?

Задача 9

Агент Д. следит за передвижениями директора некоторой компании. Известно, что директор бывает в офисе с вероятностью 60%, а на даче с вероятностью 40%. У агента Д. есть два осведомителя, причем первый ошибается с вероятностью 20%, а второй - с вероятностью 10%. Первый осведомитель утверждает, что директор компании в офисе, а второй осведомитель утверждает, что он на даче. Где директор?

Избранные Задачи

Задача 10

Пусть $n \geq 2$. Случайным образом выбираем из $\{1, 2, \ldots, n\}$ одно число. Событие A — выбранное число делится на 2, событие B — выбранное число делится на 7. Найдите все n такие, что события A и B независимы.

Задача 11

События A, B, C *попарно* независимы и равновероятны, $A \cap B \cap C = \emptyset$. Найдите максимально возможное значение $P(A)$.

Задача 12

Придумайте пример трех событий A, B, C, независимых попарно, но не в совокупности.