Семинар 2

Задача 1

1. Верно ли равенство $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(B \cup C|A)$?
2. Привести примеры, показывающие, что следующие равенства, вообще говоря, неверны:

    a. $\mathbb{P}(A|B \cup C) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C)$
    b. $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) = 1$

> **Решение**
>
> 1. Нет, это неверно. Правильная формула, аналогичная формуле для безусловных вероятностей, такова:
> $$\mathbb{P}(B \cup C|A) = \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(B \cap C|A)$$
> Равенство будет выполняться только если $\mathbb{P}(B \cap C|A) = 0$, то есть события B и C несовместны при условии A.
>
> 2. Пусть Ω — множество, содержащее как минимум две точки.
>
>   a. Возьмём $A \supset B \cup C$, например $A = \Omega$, с $\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) > 0$.
>   b. Возьмём $B = \Omega$ и $\mathbb{P}(A) \in (0, 1)$.

Задача 2

Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и события $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ имеют положительные вероятности. Обозначим $\mathbb{P}_{H_i} := \mathbb{P}(\cdot|H_i)$, $i = 1, 2$. Докажите, что

$$\mathbb{P}_{H_1}(\cdot|H_2) = \mathbb{P}(\cdot|H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(\cdot|H_1).$$

То есть, для любого $A \in \mathcal{F}$,
$$\mathbb{P}_{H_1}(A|H_2) = \mathbb{P}(A|H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(A|H_1).$$

> **Решение**
>
> Докажем первое равенство. По определению условной вероятности:
>
> $$\mathbb{P}_{H_1}(A|H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A \cap H_2)}{\mathbb{P}_{H_1}(H_2)}$$

Теперь раскроем вероятности в числителе и знаменателе, используя определение меры $\mathbb{P}_{H_1}$:

$$\mathbb{P}_{H_1}(A \cap H_2) = \mathbb{P}(A \cap H_2 | H_1) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_2 \cap H_1)}{\mathbb{P}(H_1)}$$

$$\mathbb{P}_{H_1}(H_2) = \mathbb{P}(H_2 | H_1) = \frac{\mathbb{P}(H_2 \cap H_1)}{\mathbb{P}(H_1)}$$

Подставляя это обратно в исходное выражение, получаем:

$$\mathbb{P}_{H_1}(A | H_2) = \frac{\frac{\mathbb{P}(A \cap H_1 \cap H_2)}{\mathbb{P}(H_1)}}{\frac{\mathbb{P}(H_1 \cap H_2)}{\mathbb{P}(H_1)}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_1 \cap H_2)}{\mathbb{P}(H_1 \cap H_2)}$$

Это в точности определение $\mathbb{P}(A | H_1 \cap H_2)$. Второе равенство $\mathbb{P}(\cdot | H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(\cdot | H_1)$ доказывается абсолютно аналогично, просто поменяв ролями H_1 и H_2.

Задача 3

Колоду из 52 карт раздают на 4 игроков. Один из игрока объявляет, что у него есть туз.

a. Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз?
b. Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз, если он объявил, что у него есть туз пик?

Сперва решите эту задачу напрямую, не используя понятие условной вероятности (переопределяя множество элементарных исходов), а затем по определению условной вероятности.

Решение

Это может быть немного удивительно, потому что почему масть туза должна менять вероятность? Конечно, должна, потому что иметь туза пик не так просто, как иметь *любого* туза, и это сильнее коррелирует с наличием любого другого туза. Давайте посчитаем это количественно.

a. Пусть $A_{\geq 1}$ — событие, что у игрока есть хотя бы один туз, а $A_{\geq 2}$ — что у него хотя бы два туза. Мы ищем $\mathbb{P}(A_{\geq 2} | A_{\geq 1})$. Давайте посчитаем:

   - Число возможных 13-карточных рук: $|\Omega| = \binom{52}{13}$.
   - Число рук без тузов: $\binom{48}{13}$.
   - Число рук с хотя бы одним тузом: $\binom{52}{13} - \binom{48}{13}$.
   - Число рук с ровно одним тузом: $\binom{4}{1}\binom{48}{12}$.
   - Число рук с хотя бы двумя тузами: $(\binom{52}{13} - \binom{48}{13}) - \binom{4}{1}\binom{48}{12}$. Таким образом, искомая вероятность:

$$\mathbb{P}(A_{\geq 2} | A_{\geq 1}) = \frac{\mathbb{P}(A_{\geq 2})}{\mathbb{P}(A_{\geq 1})} = \frac{\binom{52}{13} - \binom{48}{13} - \binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13} - \binom{48}{13}} \approx 0.37$$

b. Пусть A_S — событие, что у игрока есть туз пик. Мы ищем $\mathbb{P}(A_{\geq 2} | A_S)$. Новое пространство элементарных исходов — это все руки, содержащие туз пик. Их число равно $\binom{51}{12}$. Среди этих рук те, что не содержат других тузов (т.е. содержат ровно одного туза — пикового), состоят из туза пик и 12 карт из 48 не-тузов. Их число $\binom{48}{12}$. Число рук, содержащих туз пик и хотя бы еще один туз, равно

$\binom{51}{12} - \binom{48}{12}$. Поэтому

$$\mathbb{P}(A_{\geq 2}|A_S) = \frac{\binom{51}{12} - \binom{48}{12}}{\binom{51}{12}} = 1 - \frac{\binom{48}{12}}{\binom{51}{12}} = 1 - \frac{48! \cdot 39!}{51! \cdot 36!} = 1 - \frac{39 \cdot 38 \cdot 37}{51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.56$$

Это значение заметно больше, чем в пункте (а).

Задача 4

Из множества $\{1, 2, ..., n\}$ без возвращения по очереди выбирают три различных числа. Найдите условную вероятность того, что третье число лежит между первым и вторым, при условии, что первое число меньше второго.

Решение

Пусть выбранные числа это x, y, z. Они различны. Рассмотрим любые три различных числа a, b, c из множества. Существует $3! = 6$ равновероятных способов упорядочить их при выборе. Пусть A — событие, что первое число меньше второго ($x < y$). Пусть B — событие, что третье число лежит между первым и вторым ($x < z < y$ или $y < z < x$). Мы ищем $\mathbb{P}(B|A)$.
По симметрии, для любой пары различных чисел (x, y) равновероятно, что $x < y$ или $y < x$. Поэтому $\mathbb{P}(A) = 1/2$.
Событие $A \cap B$ означает, что $x < z < y$. Из 6 возможных перестановок трех чисел a, b, c, только одна удовлетворяет этому условию. Следовательно, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$.
Тогда условная вероятность равна:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3.$$

Задача 5

(а) В мешке лежали один шар белого и один шар чёрного цвета. Из него извлекли один шар и положили в пустой ящик. Также в ящик положили ещё один белый шар. Наконец, из ящика извлекли один шар, он оказался белым. Какова вероятность того, что оставшийся в~ящике шар тоже белый?

(б) Решите предыдущую задачу в предположении, что исходно в мешке было 10 черных и 7 белых шаров.

Решение

a. Пусть W_1 — событие, что из мешка был извлечен белый шар (первое извлечение), а W_2 — событие, что затем из ящика был извлечен белый шар (второе извлечение). Мы интерпретируем задачу следующим образом:

- $\mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_1^c) = 1/2$, так как в мешке один белый и один черный шар.
- $\mathbb{P}(W_2 \mid W_1) = 1$, так как если мы вынули белый шар из мешка, в ящике перед вторым извлечением будет два белых шара.
- $\mathbb{P}(W_2 \mid W_1^c) = 1/2$, так как если мы вынули черный шар из мешка, в ящике будет один белый и один черный шар.
- Мы хотим найти $\mathbb{P}(W_1 \mid W_2)$. Действительно, оставшийся в ящике шар будет белым тогда и только тогда, когда при первом извлечении был вынут белый шар.

С этими обозначениями задача легко решается по формуле Байеса:

$$\mathbb{P}(W_1|W_2) = \frac{\mathbb{P}(W_2 \mid W_1)\mathbb{P}(W_1)}{\mathbb{P}(W_2)} = \frac{\mathbb{P}(W_2 \mid W_1)\mathbb{P}(W_1)}{\mathbb{P}(W_2|W_1)\mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(W_2|W_1^c)\mathbb{P}(W_1^c)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

b. Теперь в мешке 10 черных и 7 белых шаров. Единственное изменение в том, что $\mathbb{P}(W_1) = 7/17$ и, следовательно, $\mathbb{P}(W_1^c) = 10/17$, что дает в ответе $\frac{7}{12}$.

Задача 6

(Урновая схема Пойа) В урне находятся a белых и b черных шаров. Выполняем n случайных извлечений и сразу после каждого извлечения шар возвращается в урну вместе с m других шарами того же цвета. ($m \geq -1$ и $n \leq a + b$ если $m = -1$).

a) Какова вероятность, что из $n = n_1 + n_2$ выбранных шаров белых шаров будет n_1, а черных n_2?
b) Докажите, что вероятность извлечь на i-м шаге белый шар равна $a/(a+b)$.

Решение

a. Вероятность любой конкретной последовательности извлечений, содержащей n_1 белых и n_2 черных шаров, равна:

$$\frac{(a(a+m)\dots(a+(n_1-1)m)) \cdot (b(b+m)\dots(b+(n_2-1)m))}{(a+b)(a+b+m)\dots(a+b+(n-1)m)}$$

Число таких последовательностей равно мультиномиальному коэффициенту $\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1}$. Итоговая вероятность:

$$\mathbb{P}(n_1 \text{ белых}, n_2 \text{ черных}) = \binom{n}{n_1} \frac{\prod_{i=0}^{n_1-1}(a+im) \prod_{j=0}^{n_2-1}(b+jm)}{\prod_{k=0}^{n-1}(a+b+km)}$$

b. Поскольку вероятность последовательностей извлечений белых и черных шаров инвариантна относительно перестановок, вероятность извлечь белый шар на каждом шаге одинакова, а именно $a/(a+b)$, как и при первом извлечении.

Задача 7

(Парадокс Монти Холла). Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор? Уточнения: автомобиль равновероятно размещён за любой из трёх дверей; ведущий знает, где находится автомобиль; вне зависимости от того какую вы выбрали дверь, ведущий в любом случае обязан открыть дверь с козой (но не ту, которую вы выбрали) и предложить изменить выбор; если у ведущего есть выбор, какую из двух дверей открыть (то есть, вы указали на верную дверь, и за обеими оставшимися дверями — козы), он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью.

> 💡 Решение
>
> Да, шансы увеличатся. Действительно, если вы не меняете выбор, вы выигрываете тогда и только тогда, когда ваш первоначальный выбор был верным, а именно с вероятностью $1/3$. Если вы меняете выбор, вы выигрываете тогда и только тогда, когда первоначальный выбор был неверным, а именно с вероятностью $2/3$.

Задача 8

Ковид снова в моде! Но и британские учёные не спят: разработан новый тест, имеющий чувствительность 99% (т.е. верно диагностирует больного в 99% случаев) и специфичность 99% (лишь 1% здоровых людей объявляет больными). Известно, что в одной счастливой деревне ковидом страдает 1 человек из ее 1000 жителей. Какова вероятность того, что житель этой деревни, объявленный больным по результатам теста, действительно болен?

> 💡 Решение
>
> Пусть D — событие, что человек болен, а T — событие, что тест положителен. Нам дано:
>
> - $\mathbb{P}(D) = 1/1000 = 0.001$ (априорная вероятность болезни).
> - $\mathbb{P}(T|D) = 0.99$ (чувствительность).
> - $\mathbb{P}(\overline{T}|\overline{D}) = 0.99$ (специфичность), следовательно $\mathbb{P}(T|\overline{D}) = 1 - 0.99 = 0.01$ (вероятность ложноположительного результата).
>
> Мы хотим найти $\mathbb{P}(D|T)$, то есть вероятность того, что человек действительно болен при положительном результате теста. Используя формулу Байеса:
>
> $$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|\overline{D})\mathbb{P}(\overline{D})} = \frac{0.00099}{0.01098} \approx 0.09016$$
>
> Таким образом, вероятность того, что человек с положительным тестом действительно болен, составляет всего около 9%.

Задача 9

Агент Д. следит за передвижениями директора некоторой компании. Известно, что директор бывает в офисе с вероятностью 60%, а на даче с вероятностью 40%. У агента Д. есть два осведомителя, причем первый ошибается с вероятностью 20%, а второй - с вероятностью 10%. Первый осведомитель утверждает, что директор компании в офисе, а второй осведомитель утверждает, что он на даче. Где директор?

> 💡 Решение
>
> Ключевой момент в этой задаче — не математика, а то, как мы интерпретируем частоту ошибок осведомителей. Мы должны понимать, что когда директор находится в офисе (на даче), осведомители сообщат, что он на даче (в офисе) *независимо* с вероятностями 0.2 и 0.1.
> Формально, если мы обозначим через O событие "директор в офисе", а через I_1 событие "первый осведомитель сообщил, что директор в офисе" и I_2 событие "второй осведомитель сообщил, что директор

на даче", мы предполагаем, что $\mathbb{P}(I_1 \cap I_2|O) = \mathbb{P}(I_1|O)\mathbb{P}(I_2|O)$ и т.д. Тогда по теореме Байеса:

$$\mathbb{P}(O|I_1 \cap I_2) = \frac{\mathbb{P}(I_1 \cap I_2|O)\mathbb{P}(O)}{\mathbb{P}(I_1 \cap I_2|O)\mathbb{P}(O) + \mathbb{P}(I_1 \cap I_2|\overline{O})\mathbb{P}(\overline{O})}$$

Вероятности сообщений при условии местонахождения:

- $\mathbb{P}(I_1|O) = 1 - 0.2 = 0.8$
- $\mathbb{P}(I_2|O) = 0.1$ (ошибка)
- $\mathbb{P}(I_1|\overline{O}) = 0.2$ (ошибка)
- $\mathbb{P}(I_2|\overline{O}) = 1 - 0.1 = 0.9$

$$\mathbb{P}(O|I_1 \cap I_2) = \frac{(0.8 \cdot 0.1) \cdot 0.6}{(0.8 \cdot 0.1) \cdot 0.6 + (0.2 \cdot 0.9) \cdot 0.4} = \frac{0.048}{0.048 + 0.072} = \frac{0.048}{0.120} = 0.4$$

Апостериорная вероятность того, что директор на даче, равна $1 - 0.4 = 0.6$. Следовательно, более вероятно, что директор находится на даче.

Дополнительные Задачи

Задача 10

Пусть $n \geq 2$. Случайным образом выбираем из $\{1, 2, \dots, n\}$ одно число. Событие A — выбранное число делится на 2, событие B — выбранное число делится на 7. Найдите все n такие, что события A и B независимы.

Решение

Нам нужно решить

$$\lfloor n/14 \rfloor / n = \mathbb{P}(A \cap B) =^? \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \lfloor n/2 \rfloor \lfloor n/7 \rfloor / n^2$$

Запишите $n = 14 * k + r$, с $0 \leq r \leq 13$, чтобы получить

$$kr = 2k\lfloor r/2 \rfloor + 7k\lfloor r/7 \rfloor + \lfloor r/7 \rfloor \lfloor r/2 \rfloor$$

что выполняется, если $k = 0$ и $n = r \leq 6$, или если $k \geq 1$ и $r = 0, 2, 4, 6$. Поэтому ответ: $n = 0, 2, 4, 6 \pmod 1)4$ или $n = 3, 5$.

Задача 11

Придумайте пример трех событий A, B, C, независимых попарно, но не в совокупности.

Решение

Пусть $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ представляет n рыцарей, сидящих за круглым столом. Каждый рыцарь пьёт вино или пиво случайным образом с вероятностью $1/2$. Пусть A_k — событие, при котором рыцари k и $k + 1$ выпивают один и тот же напиток. Любая подгруппа этих событий независима, пока мы *не* *почувствуем*, что стол круглый, а именно, если взять все A_k, поскольку в этом случае

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 2 * 2^{-n} \neq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = 2^{-n}$$