Семинар 3

Задача 1

При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1, получает серьезные повреждения с вероятность p_2, и полностью ломается с вероятностью $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Найдите вероятность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностью сломана.

Задача 2

Пусть $n \geq 2$. Случайным образом выбираем из $1, 2, \dots, n$ одно число. Событие A — выбранное число делится на 2, событие B — выбранное число делится на 7. Найдите все n такие, что события A и B независимы.

Задача 3

(геометрическое распределение) Два игрока по очереди подбрасывают кость. Тот, у кого первого выпало 6, — проиграл.

a. Найдите вероятность произвести за кон ровно n бросаний.
b. Найдите вероятность того, что первый игрок проиграл.

Задача 4

a. Пусть событие A не зависит само от себя. Чему равна его вероятность?
b. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(A) = 1$. Покажите, что событие A независимо с любым событием B.

Задача 5

Кубик бросают до тех пор, пока впервые не выпадет меньше пяти очков. Какова вероятность получить при последнем броске не меньше двух очков?

Задача 6

Алиса и Боб играют в следующую игру. Бросается правильная монета до тех пор пока не встретится комбинация 110 или 100. Алиса выигрывает, если первой появилась комбинация 110, а Боб в случае, когда первой появилась комбинация 100. Кто будет выигрывать чаще? Какая вероятность побед Алисы и Боба?

Задача 7

Пусть p_n обозначает вероятность того, что за n подбрасываний симметричной монеты ни разу не выпадут три орла подряд. Найдите рекурсию для $ p_n $.

Задача 8

События A, B, C попарно независимы и равновероятны, $A \cap B \cap C = \emptyset$. Найти максимально возможное значение $\mathbb{P}(A)$.

Задача 9

Согласно расписанию, автобус и троллейбус ходят каждые 20 минут до полуночи, троллейбус начинает движение в 6:00, а автобус – в 6.15. Найти вероятность уехать троллейбусом, придя на остановку в случайный момент времени днем и выбрав первый подошедший транспорт.

Задача 10

X и Y договорились встретиться в промежуток времени с 12.00 до 13.00, причем каждый из них готов ждать ровно 30 минут. Какова вероятность встречи? Какова вероятность того, что они встретились и X не ждал Y? Какова вероятность, что они пришли одновременно?

Задача 11

Стандартный компьютерный генератор rand выдает случайные числа на интервале от нуля до единицы, далее из каждого извлекают квадратный корень и ответ печатают в формате с фиксированной точкой, используя точность 16 знаков после запятой (то есть например, так: $0.00032678911350 15\ldots$). Найти вероятность, что в этой записи второй цифрой после десятичной точки будет двойка? Найдите ответ аналитически и сравните с результатом компьютерного эксперимента.

Задача 12

Трое загадывают по числу из отрезка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что существует треугольник с такими сторонами?