Семинар 3

Задача 1

При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1, получает серьезные повреждения с вероятность p_2, и полностью ломается с вероятностью $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Найдите вероятность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностью сломана.

> Решение
>
> Пусть состояние байдарки после k порогов описывается числом полученных серьезных повреждений. Состояние “сломана” — это отдельное состояние. Обозначим:
>
> - a_k: вероятность, что после k порогов у байдарки нет повреждений.
> - b_k: вероятность, что после k порогов у байдарки одно серьезное повреждение.
> - c_k: вероятность, что после k порогов байдарка сломана.
>
> ясно $a_n = p_1^n$ и $b_n = np_1^{n-1}p_2$. Вероятность того, что байдарка не сломана после n порогов, равна $a_n + b_n = p_1^{n-1}(p_1 + np_2)$.
> но применим более общий подход. Начальные условия: $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$. Рекуррентные соотношения:
>
> - Байдарка остается без повреждений, только если она была без повреждений и не получила их на следующем пороге: $a_k = a_{k-1} \cdot p_1$. Отсюда $a_n = p_1^n$.
> - Байдарка получает первое серьезное повреждение, если она была без повреждений и получила его, либо она уже имела одно повреждение и не получила нового: $b_k = a_{k-1} \cdot p_2 + b_{k-1} \cdot p_1$.
> - Байдарка ломается, если она уже была сломана, или была без повреждений и сломалась, или имела одно повреждение и получила еще одно или сломалась: $c_k = c_{k-1} + a_{k-1} \cdot p_3 + b_{k-1} \cdot (p_2 + p_3)$.
>
> Затем мы можем найти a_n и b_n, как указано выше, методом индукции.

Задача 2

Пусть $n \geq 2$. Случайным образом выбираем из $1, 2, \ldots, n$ одно число. Событие A — выбранное число делится на 2, событие B — выбранное число делится на 7. Найдите все n такие, что события A и B независимы.

> Решение
>
> Нам нужно решить
> $$\lfloor n/14 \rfloor / n = \mathbb{P}(A \cap B) =^{?} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \lfloor n/2 \rfloor \lfloor n/7 \rfloor / n^2$$

Запишите $n = 14 * k + r$, с $0 \le r \le 13$, чтобы получить

$$kr = 2k\lfloor r/2 \rfloor + 7k\lfloor r/7 \rfloor + \lfloor r/7 \rfloor \lfloor r/2 \rfloor$$

что выполняется, если $k = 0$ и $n = r \le 6$, или если $k \ge 1$ и $r = 0, 2, 4, 6$. Поэтому ответ: $n = 0, 2, 4, 6 \pmod 14$ или $n = 3, 5$.

Задача 3

(геометрическое распределение) Два игрока по очереди подбрасывают кость. Тот, у кого первого выпало 6, — проиграл.

a. Найдите вероятность произвести за кон ровно n бросаний.
b. Найдите вероятность того, что первый игрок проиграл.

Решение

a. Чтобы было ровно n бросков, $(n-1)$-й раз результат не должен быть 6, а n-й раз должен быть 6. Таким образом, вероятность равна $(5/6)^{n-1}1/6$.
b. Из предыдущего пункта следует, что игра закончится с вероятностью 1. Пусть p — вероятность победы первого игрока. Тогда, исходя из первого результата, $(1-p) = 1/6 + (5/6)p$, и $p = 5/11$.

Задача 4

a. Пусть событие A не зависит само от себя. Чему равна его вероятность?
b. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(A) = 1$. Покажите, что событие A независимо с любым событием B.

Решение

a. По определению независимости, $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A)$. Поскольку $A \cap A = A$, это означает $\mathbb{P}(A) = (\mathbb{P}(A))^2$. Таким образом, вероятность такого события может быть только 0 или 1.
b. Если $\mathbb{P}(A) = 0$, то $0 \le \mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Если $\mathbb{P}(A) = 1$, то $\mathbb{P}(A^c) = 0$, поэтому A^c и B независимы. Следовательно, A и B независимы.

Задача 5

Кубик бросают до тех пор, пока впервые не выпадет меньше 5 очков. Какова вероятность получить при последнем броске не меньше 2 очков?

Решение

Прежде всего, заметим, что игра останавливается с вероятностью 1, поэтому «последний бросок» четко определен. В последнем броске мы с равной вероятностью получаем одно из значений $\{1, 2, 3, 4\}$, и нас просят найти вероятность того, что это значение будет не меньше 2, а именно из множества $\{2, 3, 4\}$. Таким образом, ответ $3/4$.
Мы можем формализовать это интуитивное решение. Пусть A_k — событие, при котором игра останавливается на k-м броске, а B — событие, что при последнем броске выпало не меньше 2. Тогда $\mathbb{P}(B|A_k) = 3/4$, так как это в точности вероятность того, что на k-м броске мы получили не меньше 2,

зная, что мы получили не больше 4. Тогда

$$\mathbb{P}(B) = \sum_k \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k) = 3/4 \sum_k \mathbb{P}(A_k) = 3/4$$

Таким образом, первоначальная интуиция верна, нам не нужно вычислять точное значение $\mathbb{P}(A_k)$, нам просто нужно знать, что сумма этих вероятностей равна 1, а именно, что игра закончится с вероятностью 1.

Задача 6

Алиса и Боб играют в следующую игру. Бросается правильная монета до тех пор пока не встретится комбинация 110 или 100. Алиса выигрывает, если первой появилась комбинация 110, а Боб в случае, когда первой появилась комбинация 100. Кто будет выигрывать чаще? Какая вероятность побед Алисы и Боба?

Решение

Пусть $p_{x_1 x_2 \ldots}$ — вероятность того, что Алиса выиграет, если (при условии, что) первые броски были $x_1, x_2, \ldots$, и пусть $p = p_\emptyset$ — вероятность выигрыша Алисы. Например, p_{10} — это вероятность того, что Алиса выиграет, если первые два результата были $1, 0$. Тогда мы имеем $p_0 = p$, $p_{11} = 1$, $p_{100} = 0$, $p_{101} = p_1$. Теперь мы можем обусловить по предыдущим результатам, чтобы получить

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2}p_0 + \tfrac{1}{2}p_1 = (p + p_1)/2 \\ p_1 &= \tfrac{1}{2}p_1 1 + \tfrac{1}{4}p_{100} + \tfrac{1}{4}p_{101} = (2 + 0 + p_1)4 \end{aligned}$$

Это дает $p_1 = p = 2/3$.

Задача 7

Пусть p_n обозначает вероятность того, что за n подбрасываний симметричной монеты ни разу не выпадут три орла подряд. Найдите рекурсию для p_n.

Решение

Пусть B_n — событие, при котором в n бросках нет трех орлов подряд, а A_k — событие, при котором первая решка выпадает на k-й позиции. Мы имеем, что $\mathbb{P}(B_n|A_k) = 0$ для $k > 3$, в то время как $\mathbb{P}(B_n|A_k) = \mathbb{P}(B_{n-k})$ для $k = 1, 2, 3$. Следовательно

$$p_n = \mathbb{P}(B_n) = \sum_k \mathbb{P}(B_n|A_k)\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{8}p_{n-3}, \quad \text{for } n \geq 3.$$

Начальные условия: $p_0 = p_1 = p_2 = 1$.

Задача 8

События A, B, C *попарно* независимы и равновероятны, $A \cap B \cap C = \emptyset$. Найдите максимально возможное значение $P(A)$.

Решение

Пусть $p = P(A) = P(B) = P(C)$. Тогда

$$(1-p)^2 = P(\bar{B} \cap \bar{C}) \geq P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - (3p - 3p^2 + 0)$$

Отсюда следует, что $p \leq 1/2$. Легко проверить, что $p = 1/2$ возможно. Например, $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ с равномерной вероятностью, и $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}$.

Задача 9

Согласно расписанию, автобус и троллейбус ходят каждые 20 минут до полуночи, троллейбус начинает движение в 6:00, а автобус – в 6.15. Найти вероятность уехать троллейбусом, придя на остановку в случайный момент времени днем и выбрав первый подошедший транспорт.

Решение

В силу периодичности (рассматривая по модулю 20 минут), мы можем ограничиться одним 20-минутным интервалом, скажем, $[0, 20]$. Будем считать, что *прибытие в случайный момент времени* означает, что вероятность прибытия в заданный интервал пропорциональна его длине. Поскольку мы уезжаем на троллейбусе тогда и только тогда, когда прибываем в интервале $(15, 20]$, вероятность этого равна $5/20 = 1/4$.

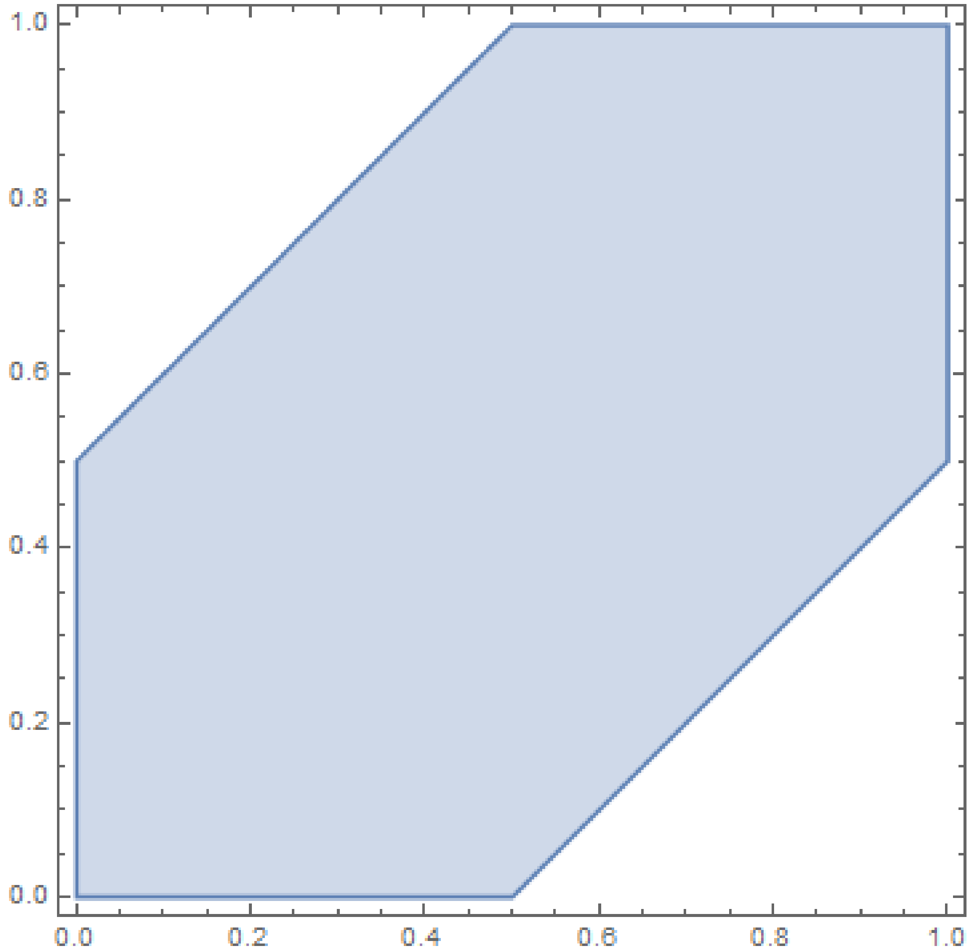
Задача 10

X и Y договорились встретиться в промежуток времени с 12.00 до 13.00, причем каждый из них готов ждать ровно 30 минут. Какова вероятность встречи? Какова вероятность того, что они встретились и X не ждал Y? Какова вероятность, что они пришли одновременно?

Решение

Будем измерять всё в часах от 12:00. Пусть X и Y — время прибытия двух людей. Они независимы и равномерно распределены на интервале $[0, 1]$ часа. Пространство элементарных исходов — это квадрат $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с площадью 1. Следовательно, вероятность события в Ω — это его мера Лебега.

- Они встретятся тогда и только тогда, когда $|X - Y| \leq 0.5$. Таким образом, $\mathbb{P}(|X - Y| \leq 0.5) = 3/4$.



- Они встретятся и X не будет ждать Y тогда и только тогда, когда $0 \leq X - Y \leq 0.5$.
- Вероятность того, что они прибудут одновременно, $X = Y$, — это площадь диагонали квадрата, то есть 0.

Задача 11

Стандартный компьютерный генератор `rand` выдает случайные числа на интервале $[0, 1]$, далее из каждого извлекают квадратный корень и ответ печатают в формате с фиксированной точкой, используя точность 16 знаков после запятой (то есть например, так: $0.0003267891135015\ldots$). Найти вероятность, что в этой записи второй цифрой после десятичной точки будет двойка? Найдите ответ аналитически и сравните с результатом компьютерного эксперимента.

Решение

Пусть X — результат генерации, а $Y = \sqrt{X}$. $\mathbb{P}(Y \in [a, b)) = \mathbb{P}(X \in [a^2, b^2)) = b^2 - a^2$. Таким образом,

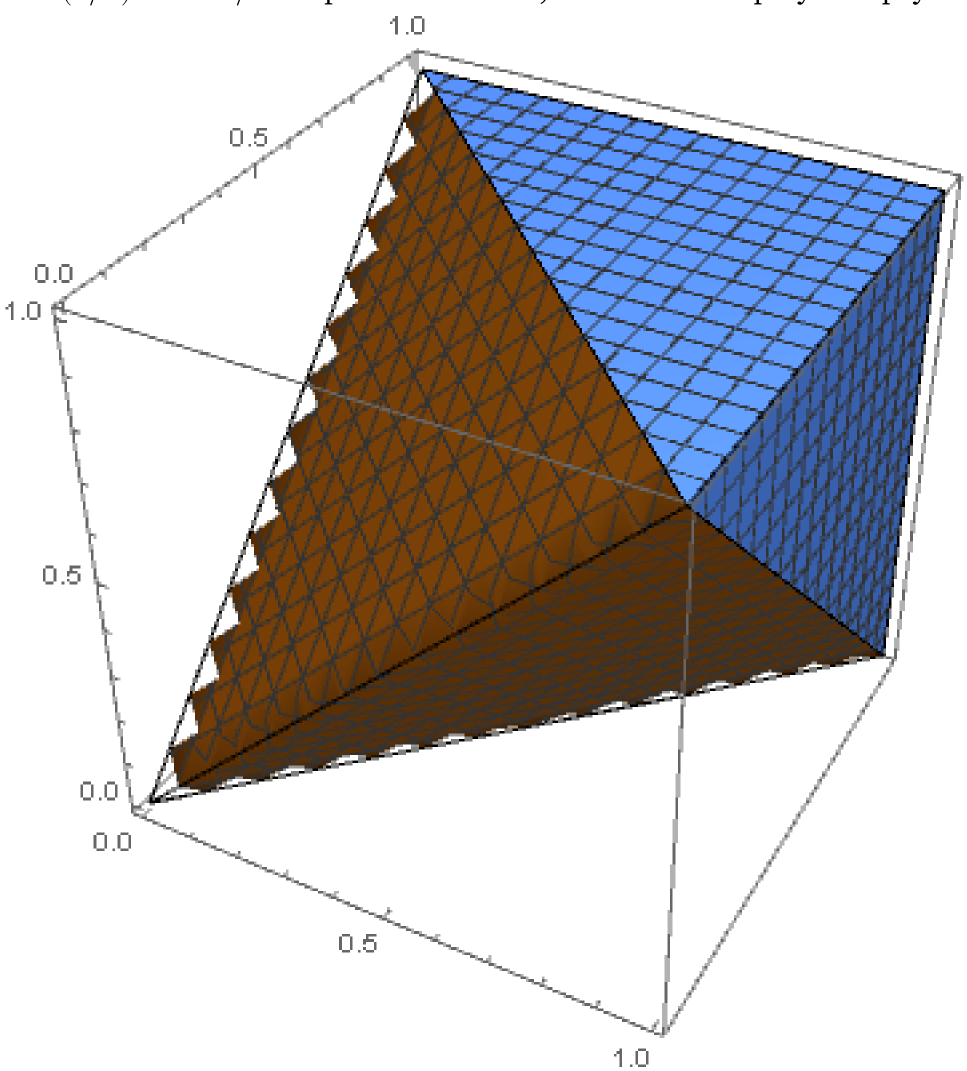
$$\mathbb{P}\left(Y \in \cup_{k=0}^{9}[\frac{10k+3}{100}, \frac{10k+2}{100})\right) = 10^{-4}\sum_{k=0}^{9} 20k + 5 = 95/1000 = 0.095$$

Задача 12

Трое загадывают по числу из отрезка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что существует треугольник с такими сторонами?

Решение

Три числа являются длинами сторон треугольника тогда и только тогда, когда наибольшее из них не превышает суммы двух других. Другими словами, нам нужно вычислить объём области $\{\max\{x, y, z\} \leq (x + y + z)/2\}$ внутри единичного куба $[0, 1]^3$. Дополнение состоит из трех непересекающихся областей $x + y \leq z$, $x + z \leq y$ и $y + z \leq x$. Каждая из этих областей является тетраэдром с объемом $1/6$. Таким образом, общий объём «неудачной» области составляет $3 \cdot (1/6) = 1/2$. Вероятность того, что числа образуют треугольник, равна $1 - 1/2 = 1/2$.



В качестве альтернативы, каждая из 6 перестановок, упорядочивающих три числа, имеет одинаковую вероятность. Таким образом, мы можем вычислить меру множества $\{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \ : \ x \leq y \leq z \leq x + y\}$, а именно

$$p = 6 \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^{\min(x+y,1)} dz = 6 \int_0^1 dx \int_x^1 (\min(x + y, 1) - y) dy = 1/2$$