Семинар 4

Если написано “дана/известна случайная величина”, ξ то подразумевается, что известны $\mathbb{P}_\xi, F_\xi, p_\xi$ (если плотность существует). Если вас просят найти распределение ξ, то достаточно найти любой из объектов выше.

Задача 1

Дано распределения случайного вектора

$\beta \setminus \alpha$	-2	-1	0	1	2
-2	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$
-1	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$
0	$1/24$	$1/24$	$1/6$	$1/24$	$1/24$
1	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$
2	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$

a. Найти вероятность $P(\alpha = \beta)$.
b. Найти вероятность $P(\alpha > \beta)$.
c. Найти вероятность $P(\alpha \leqslant \beta)$.
d. Найти распределения α и β.
e. Верно ли, что α и β независимы?
f. Найти распределение $\alpha + \beta$.
g. Найти распределение $\alpha\beta$.
h. Найти распределение случайного вектора с компонентами $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.
i. Найти распределение случайного вектора с компонентами $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$.

Решение

a. $\mathbb{P}(\alpha = \beta)$ — это сумма вероятностей на главной диагонали:

$$\mathbb{P}(\alpha = \beta) = p_{-2,-2} + p_{-1,-1} + p_{0,0} + p_{1,1} + p_{2,2} = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} + \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{3+4}{24} =$$

b. $\mathbb{P}(\alpha > \beta)$ — это сумма всех элементов над главной диагональю. Таблица симметрична, поэтому $\mathbb{P}(\alpha > \beta) = \mathbb{P}(\alpha < \beta) = (1 - \mathbb{P}(\alpha = \beta))/2 = 17/48$.

c. $\mathbb{P}(\alpha \leq \beta) = 1 - \mathbb{P}(\alpha > \beta) = \frac{31}{48}$.

d. Чтобы получить распределение α, просуммируйте по столбцам: например, $\mathbb{P}(\alpha = -2) = 4 \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$. В силу симметрии таблицы распределение β (сумма по строкам) будет таким же.

e. Нет, они не независимы, например, $\mathbb{P}(\alpha = -2, \beta = -2) = 1/32 \neq \mathbb{P}(\alpha = -2)\mathbb{P}(\beta = -2) = 1/36$.

Чтобы найти распределения для следующих пунктов, нужно сгруппировать ячейки таблицы (это утомительные, но простые вычисления):

f. Для $\alpha+\beta$: сгруппируйте ячейки (i,j) с одинаковой суммой $k=i+j$.
g. Для $\alpha\beta$: сгруппируйте ячейки с одинаковым произведением $k=i\cdot j$.
h. Для $(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$ это биекция с (α,β), поэтому каждая запись соответствует одной записи в таблице, т.е. $(\alpha,\beta)=((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta),(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))/2$.
i. Для $(\alpha+\beta,\alpha\beta)$ вычислите совместный закон, разделяя случаи, когда α или β обращаются в ноль.

Задача 2 [H]

Даны распределения независимых случайных величин ξ и η:

ξ	-2	-1	0	1	2
	$1/4$	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/4$

η	-2	-1	0	1	2
	$1/8$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/8$

a. Найти вероятность $P(\xi=\eta)$.
b. Найти вероятность $P(\xi>\eta)$.
c. Найти вероятность $P(\xi\leqslant\eta)$.
d. Найти распределения $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$.
e. Найти распределение $\xi\eta$.
f. Найти распределение случайного вектора с компонентами $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$.
g. Зависимы ли $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$?
h. Найти распределение случайного вектора с компонентами $\xi+\eta$ и $\xi\eta$.

Решение

a. $\mathbb{P}(\xi=\eta)=\sum_k\mathbb{P}(\xi=k,\eta=k)=\sum_k\mathbb{P}(\xi=k)\mathbb{P}(\eta=k)=\frac{3}{16}$ в силу независимости.

Аналогично для b, c, d, e, f, h. Вычисления производятся путем рассмотрения $\mathbb{P}(\xi=i,\eta=j)=\mathbb{P}(\xi=i)\mathbb{P}(\eta=j)$ и суммирования вероятностей по соответствующим областям.

g. Проверим независимость $U=\xi+\eta$ и $V=\xi-\eta$. $\mathbb{P}(U=4,V=0)=\mathbb{P}(\xi=2,\eta=2)\neq\mathbb{P}(V=0)\mathbb{P}(U=4)$. Величины U и V зависимы.

Независимость случайных величин

Задача 3 [H]

Пусть $\xi\sim\mathrm{Uniform}([0,1])$, а $\eta\sim\mathrm{Bernoulli}(1/3)$. Поселите эти случайные величины на одном и том же вероятностном пространстве, так, чтобы они были

a. независимы
b. зависимы.

Имеется ввиду, что в нужно придумать вероятностное пространство (свое для каждого из пунктов) и случайную величину $\zeta=(\alpha,\beta)$ на нем, такую что $\mathbb{P}_\alpha=\mathbb{P}_\xi$ и $\mathbb{P}_\eta=\mathbb{P}_\beta$.

Решение

a. **Независимы**: Возьмем в качестве вероятностного пространства $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ с мерой Лебега. Положим $\alpha(t_1, t_2) = t_1$ и $\beta(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{[0,1/3]}(t_2)$. То же самое можно сделать, взяв $\Omega = [0,1] \times \{0,1\}$.

b. **Зависимы**: Возьмем пространство $\Omega = [0,1]$ с мерой Лебега. Положим $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = \mathbf{1}_{[0,1/3]}(t)$.

Задача 4

Пусть вероятностное пространство имеет вид $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Leb})$. Зависимы ли следующие случайные величины?

a. $\xi(t) = 2t$, $\eta(t) = 1 - t^2$
b. $\xi(t) = \text{sign}\,[\sin(2\pi t)]$, $\eta(t) = \text{sign}\,[\sin(4\pi t)]$
c. $\xi(t) = \text{sign}\,[\sin(2\pi t)]$, $\eta(t) = \text{sign}(t - 1/3)$?

Решение

a. Зависимы. Они функционально связаны: $\eta(t) = 1 - (\xi(t)/2)^2$. Если мы знаем значение $\xi(t)$, мы однозначно знаем значение $\eta(t)$. Например, для достаточно малого $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\xi \le \varepsilon, \eta \le \varepsilon) = 0 \ne \mathbb{P}(\xi \le \varepsilon)\mathbb{P}(\eta \le \varepsilon) > 0$.
b. Независимы. $\mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 1) = 1/4 = \mathbb{P}(\xi = 1)\mathbb{P}(\eta = 1)$, и этого достаточно, поскольку и η, и ξ принимают только два значения с положительной вероятностью.
c. Зависимы. Например, $\mathbb{P}(\xi = +1 | \eta = -1) = 1 > \mathbb{P}(\xi = +1)$.

Задача 5 [Н]

Привести пример двух зависимых, но не функционально зависимых дискретных с.в. или объяснить почему такой пример не существует.

Решение

Две случайные величины α, β называются функционально зависимыми, если одна является измеримой функцией другой, например, $\beta = f(\alpha)$. Это означает, что зная значение α, мы однозначно знаем значение β. Это, как правило, гораздо более сильное условие, чем просто зависимость. Например, в предыдущей задаче $\xi(t) = \text{sign}\,[\sin(2\pi t)]$ и $\eta(t) = \text{sign}(t - 1/3)$ зависимы, но не функционально зависимы.

Задача 6 [Н]

Верно ли, что если ξ, η независимы, то и для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с.в. $f(\xi), f(\eta)$ независимы?

Решение

Можно даже взять измеримые функции f, g. Тогда

$$\mathbb{P}(f(\xi) \in A, g(\eta) \in B) = \mathbb{P}(\xi \in f^{-1}(A), \eta \in g^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\xi \in f^{-1}(A))\mathbb{P}(\eta \in g^{-1}(B)) = \mathbb{P}(f(\xi) \in A)\mathbb{P}(g(\eta) \in B$$

Задача 7 [H]

Верно ли, что если ξ, η зависимы, то и ξ^2, η^2 обязательно зависимы?

Решение

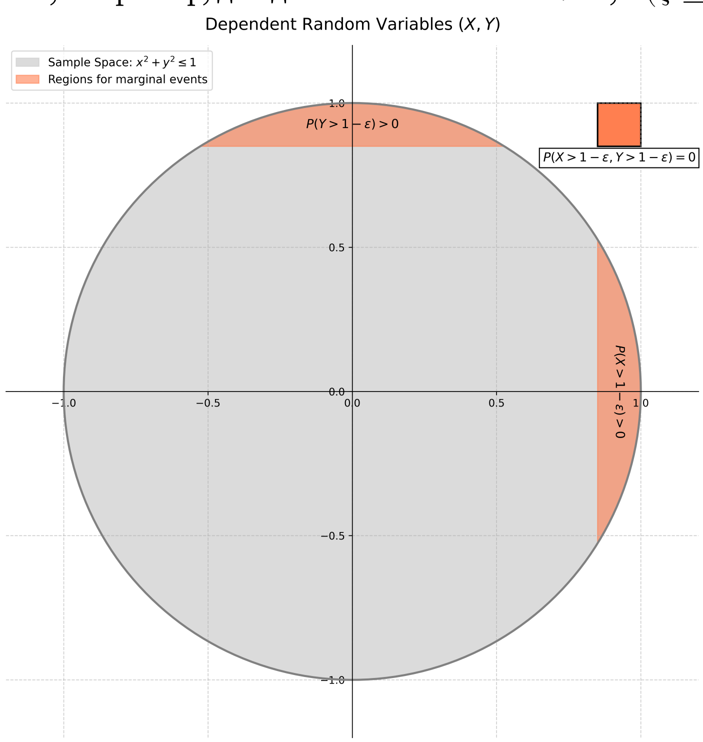
В общем случае неверно, что из независимости $f(\xi)$ и $g(\eta)$ следует независимость ξ и η. Например, возьмем $\xi = \eta = 2\zeta - 1$, где $\zeta \sim \text{Bernoulli}(1/2)$. Тогда $\xi^2 = \eta^2 = 1$ независимы.

Задача 8 [H]

Пусть случайная величина (ξ, η) имеет равномерное распределение в $(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$. Являются ли величины ξ и η независимыми?

Решение

Нет, например, для достаточно малого $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\xi \geq 1-\varepsilon, \eta \geq 1-\varepsilon) = 0 \neq \mathbb{P}(\xi \geq 1-\varepsilon)\mathbb{P}(\eta \geq 1-\varepsilon) > 0$.

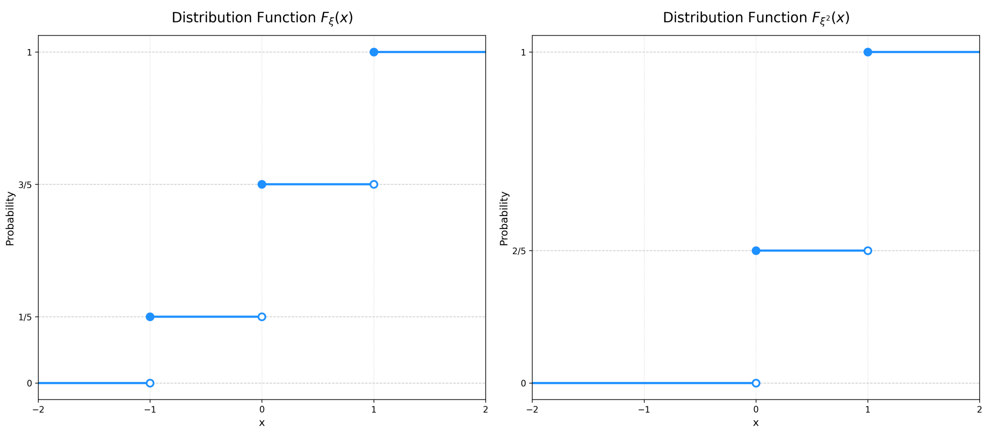


Функция распределения

Задача 9

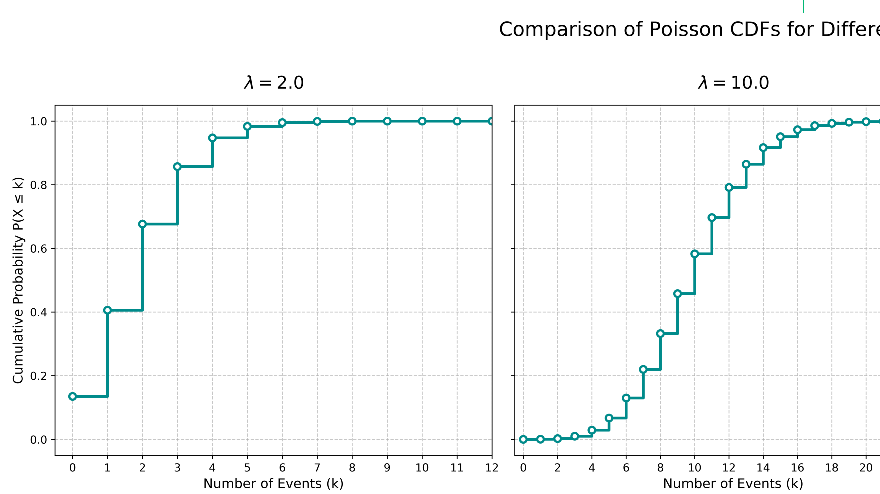
Имеется случайная величина ξ с распределением ниже. Нарисуйте F_ξ и F_{ξ^2}.

ξ	-1	0	1
$\mathbb{P}_\xi$	$1/5$	$2/5$	$2/5$

> **Решение**
>
> 
>

Задача 10 [H]

Нарисуйте функцию распределения F_ξ для $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

> **Решение**
>
> Имеем:
>
> - $F_\xi(x) = 0$ для $x < 0$.
> - $F_\xi(x) = e^{-\lambda}$ для $0 \le x < 1$.
> - $F_\xi(x) = e^{-\lambda}(1 + \lambda)$ для $1 \le x < 2$.
>
> 
>
>
> и так далее. Функция стремится к 1 при $x \to \infty$.

Задача 11

Стержень длины 2 сломали в случайной точке. Введите явно, с указанием вероятностного пространства, случайную величину ξ, дающую длину большего куска из двух получившихся. Найдите F_ξ, F_{ξ^2} и плотности p_ξ, p_{ξ^2}.

Решение

Возьмем $\Omega = [0,2]$ с равномерной мерой. Точка излома $U \sim \text{Uniform}([0,2])$, куски имеют длины U и $2-U$. Таким образом, нас интересует случайная величина $\xi = \max(U, 2-U)$, которая принимает значения в $[1,2]$.
Заметим, что $\xi \le x \iff 2-x \le U \le x$. Таким образом, для $x \in [1,2]$

$$F_\xi(x) = \int_{2-x}^{x} \frac{1}{2} du = x - 1$$

Значит, ξ равномерно распределена на $[1,2]$, ее плотность постоянна на этом интервале.
Функция распределения ξ^2 тогда равна $F_{\xi^2}(x) = \sqrt{x} - 1$ для $x \in [1,4]$, а ее плотность - $(2x)^{-1/2}\mathbf{1}_{[1,4]}$.

Задача 12

Даны независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$. Найдите функцию распределения случайной величины

a. $\max(\xi_1, \dots, \xi_n)$,
b. $\min(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Решение

Пусть $F_i(x) = \mathbb{P}(\xi_i \le x)$ - функция распределения для ξ_i.

a. **Максимум:** Пусть $M_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$, тогда $\{M_n \le x\}$ тогда и только тогда, когда все ξ_i не превосходят x. Таким образом, в силу независимости:

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \le x) = \mathbb{P}(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x, \dots, \xi_n \le x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

Если все ξ_i одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$, то $F_{M_n}(x) = (F(x))^n$.

b. **Минимум:** $m_n = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$. В этом случае мы рассуждаем как выше для дополнительного события $m_n > x$, чтобы получить $F_{m_n}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(x))$. Если все ξ_i одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$, то $F_{m_n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

Задача 13

Пусть случайная величина ξ непрерывна (то есть, ее функция распределения F_ξ непрерывна). Найдите распределение случайной величины $F_\xi(\xi)$.

Решение

Обозначим $F = F_\xi$, чтобы напомнить, что это не случайная функция. Пусть $\eta = F(\xi)$. Поскольку F - это функция распределения, ее значения лежат в интервале $[0,1]$. Множество $F^{-1}((-\infty, y])$ является возрастающим (по y) замкнутым подмножеством $\mathbb{R}$ вида $F^{-1}((-\infty, y]) = (-\infty, s_y]$. Тогда по самому определению F

$$G(y) = \mathbb{P}(\eta \leq y) = \mathbb{P}(F(\xi) \leq y) = \mathbb{P}(\xi \in F^{-1}((-\infty, y])) = F(s_y)$$

Если F непрерывна, то $G(y) = F(s_y) = y$. Таким образом, $F_\xi(\xi)$ является равномерно распределенной случайной величиной. В общем случае, если F не является непрерывной, $G(y) \leq y$.

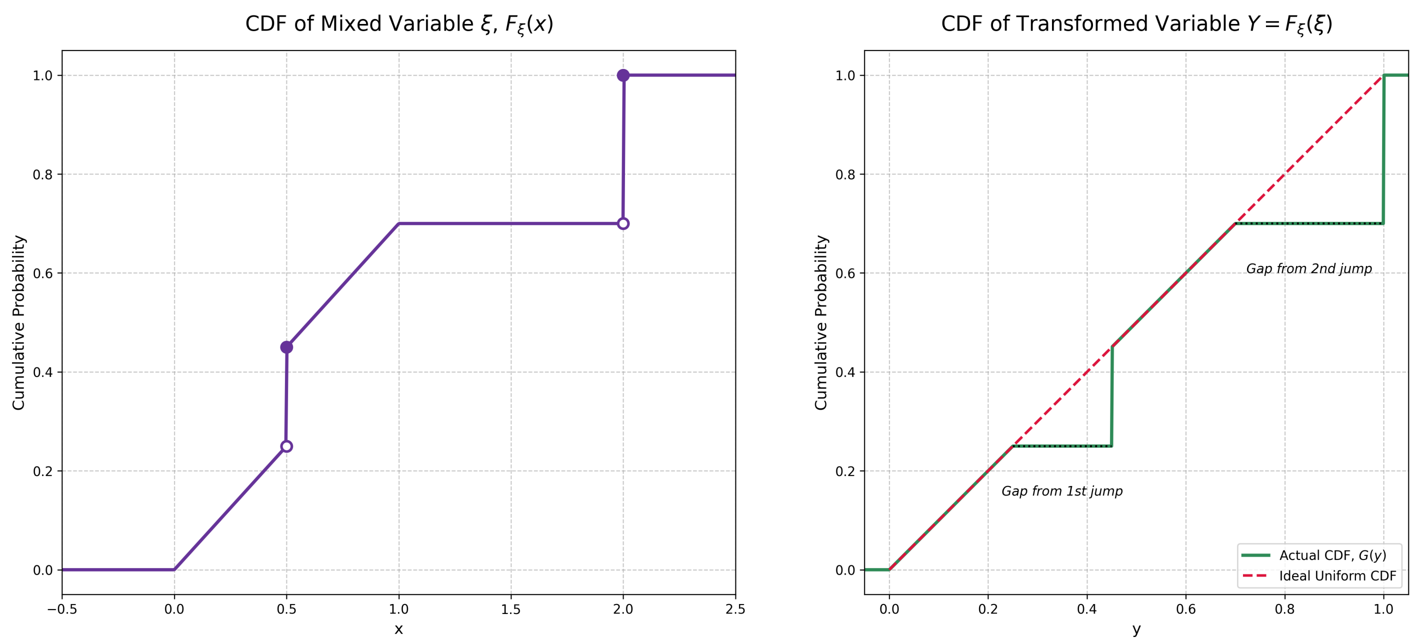


Рисунок 1

Задача 14 [H]

Пусть $\xi \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Найдите распределение случайной величины $F_{|\xi|}(\xi)$.

Решение

$|\xi|$ равномерно распределена на $[0, 1]$, следовательно $F_{|\xi|}(\xi) = \max(\xi, 0)$. Поэтому

$$G(x) := \mathbb{P}(F_{|\xi|}(\xi) \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < 0 \\ 1/2 + x/2 & \text{если } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Задача 15*

(смеси). На вероятностном пространстве Ω рассматривается следующая конструкция случайной величины $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: сначала по равномерной на отрезке $[0, 1]$ с.в. η выбирают отрезок $[0, \eta(\omega)]$, а потом независимо выбирают случайную величину $\zeta(\omega) := \xi_{\eta(\omega)}(\omega)$ с заданным распределением на отрезке $[0, \eta(\omega)]$. Найти плотность распределения получившейся случайной величины ξ, если

a. $\xi_a \sim \text{Uniform}([0, a])$,
b. $\xi_a^2 \sim \text{Uniform}([0, a])$.

Решение

$$\mathbb{P}(\zeta \leq x) = \int_0^1 \mathbb{P}(\xi_a \leq x)\, da$$

a. В этом случае последняя формула для $x \in (0,1]$ дает

$$\mathbb{P}(\zeta \leq x) = \int_0^1 \tfrac{x}{a}\mathbf{1}_{[0,a)}(x) + \mathbf{1}_{[a,\infty)}(x)\, da = x - x\log(x)$$

что имеет плотность $-\log(x)\mathbf{1}_{(0,1]}(x)$.

b. В этом случае для $x \in (0,1)$ имеем $\mathbb{P}(\xi_a \leq x) = \mathbb{P}(\xi_a^2 \leq x^2) = x^2/a\mathbf{1}_{[0,\sqrt{a})}(x) + \mathbf{1}_{[\sqrt{a},\infty)}(x)$. Поэтому для $x \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(\zeta \leq x) = \int_0^1 \tfrac{x^2}{a}\mathbf{1}_{[0,\sqrt{a})}(x) + \mathbf{1}_{[\sqrt{a},\infty)}(x) da = x^2 - 2x^2\log(x)$$

и плотность, следовательно, равна $-4x\log(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, что демонстрирует существенно иное поведение в окрестности $x = 0$.

Задача 16*

Пусть $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Зависимы ли ее целая и дробная части?

Решение

Они независимы. Пусть $X := \lfloor \xi \rfloor$ - целая часть, а $\eta := \xi - \lfloor \xi \rfloor$ - дробная часть. Для $k \in \{0,1,2,\dots\}$ и $y \in [0,1)$ вычислим совместное распределение

$$\mathbb{P}(X = k, \eta \leq y) = \mathbb{P}(k \leq \xi \leq k + y) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+y)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda y})$$

Поскольку это произведение функции от k на функцию от y, случайные величины независимы. В частности, мы видим, что X имеет геометрическое распределение с параметром (неудачи) $e^{-\lambda}$, в то время как η имеет плотность $\lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$.

Дополнительные Задачи

Задача 17

Пусть $\xi\colon \Omega \to E$ — случайная величина, а $f\colon E \to F$ — измеримая функция. Здесь E, F — измеримые пространства. Докажите, что $(\xi, f(\xi))$ независимы тогда и только тогда, когда $f(\xi)$ является константой почти наверное (п.н.).

Решение

Если $(\xi, f(\xi))$ независимы, то

$$\mathbb{P}(\xi \in A, f(\xi) \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A, \xi \in f^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\xi \in f^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(f(\xi) \in B)$$

Если мы теперь выберем $A = f^{-1}(B)$, мы получим $\mathbb{P}(f(\xi) \in B) = \mathbb{P}(f(\xi) \in B)^2$. А именно, $\mathbb{P}(f(\xi) \in B) \in \{0,1\}$ для всех измеримых B. Это правильный способ сказать, что $f(\xi)$ является константой. То есть, если σ-алгебра на F содержит синглтоны, это означает, что $f(\xi)$ является константой п.н. В противном случае, *быть константой* не определено как измеримое событие, в то время как утверждение, что закон $f(\xi)$ принимает значения в $\{0,1\}$, все еще имеет смысл.