

Семинар 5

Задача 1

Пусть $\alpha \sim \text{Uniform}[0, 1]$. Найдите следующие функции:

- Функцию плотности $p_\beta(x)$, если случайная величина β такова, что $\beta = 3\alpha - 1$.
- Функцию плотности $p_\gamma(x)$, если случайная величина γ такова, что $\gamma = -\ln(\alpha)$.
- Функцию плотности $p_\kappa(x)$, если случайная величина κ такова, что

$$\kappa = \begin{cases} 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots & \alpha \in (0, 1) \\ 0 & \alpha \notin (0, 1) \end{cases}$$

- Функцию плотности $p_\epsilon(x)$, если

$$\epsilon = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha^j & \alpha \in (0, 1) \\ 0 & \alpha \notin (0, 1) \end{cases}$$

- Функцию распределения $F_\rho(x)$, если случайная величина ρ такова, что

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha \text{ иррациональное} \\ 0 & \text{если } \alpha \text{ рациональное} \end{cases}$$

Решение

Плотность α равна $p_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

- $\beta = 3\alpha - 1$. Это линейное преобразование. $\alpha = (\beta + 1)/3$. Область значений $\beta = [-1, 2]$. $p_\beta(x) = p_\alpha\left(\frac{x+1}{3}\right) \left|\frac{d\alpha}{d\beta}\right| = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ на $[-1, 2]$. Таким образом, $\beta \sim \text{Uniform}([-1, 2])$. Вообще, аффинное преобразование равномерной случайной величины снова равномерно (на интервале, заданном тем же аффинным преобразованием).
- $\gamma = -\ln(\alpha)$, $\alpha = e^{-\gamma}$. Область значений $\gamma = [0, \infty)$. $p_\gamma(x) = p_\alpha(e^{-x}) \left|\frac{d\alpha}{d\gamma}\right| = 1 \cdot |-e^{-x}| = e^{-x}$ на $[0, \infty)$. То есть $\gamma \sim \exp(1)$.
- $\kappa = \frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1)$. $\alpha = 1 - 1/\kappa$. Область значений $\kappa = (1, \infty)$. $p_\kappa(x) = p_\alpha(1 - 1/x) \left|1/x^2\right| = 1/x^2$ на $(1, \infty)$.
- $\epsilon = \frac{1}{1+\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha = 1/\epsilon - 1$. Область значений $\epsilon = (1/2, 1)$. $p_\epsilon(x) = p_\alpha(1/x - 1) \left|-1/x^2\right| = 1/x^2$ на $(1/2, 1)$.
- $\rho = 1$ п.н., поэтому $F_\rho(x) = \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$.

Задача 2

Случайная величина α равномерна на отрезке $[-1, 3]$, найти плотность для $-|\alpha|$.

Решение

Если визуализировать графически, $-|\alpha|$ отображает плотность в точках $x > 0$ в ту же плотность в точках $-x$. Плотность $-|\alpha|$ равна $\frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-3,-1)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,0)}$. Можно также решить аналитически: для $y < 0$

$$f_{-|\alpha|}(y) = \frac{d}{dy}\mathbb{P}(-|\alpha| \leq y) = \frac{d}{dy}\mathbb{P}(\alpha \geq -y) + \frac{d}{dy}\mathbb{P}(\alpha \leq y) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-3,-1)}(y) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,0)}(y).$$

Задача 3

Случайная величина α равномерна на отрезке $[-1, 3]$, найти функцию распределения для $\frac{|\alpha|}{\alpha}$.

Решение

Так как $\mathbb{P}(\alpha = 0) = 0$, величина $\frac{|\alpha|}{\alpha}$ является знаком α . Она принимает значение -1 с вероятностью $1/4$ и $+1$ с вероятностью $3/4$. Функция распределения равна $\frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1)} + \mathbf{1}_{[1,\infty)}$.

Задача 4

Случайная величина α равномерна на отрезке $[-1, 1]$, независимая с α случайная величина β – бернуlliевская с параметром $p = \frac{1}{3}$.

- Найти функцию распределения случайной величины $\alpha\beta$.
- Найти функцию распределения случайной величины $|\alpha|\beta$.
- Найти функцию распределения случайной величины $|2\alpha - 1|\beta$.

Решение

- $F_{\alpha\beta}(x) = \frac{x+1}{6}\mathbf{1}_{[-1,0)}(x) + \frac{x+5}{6}\mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x).$
- $F_{|\alpha|\beta}(x) = \frac{x+2}{3}\mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}.$
- $F_{|2\alpha-1|\beta}(x) = \frac{4+x}{6}\mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \frac{9+x}{12}\mathbf{1}_{[1,3)}(x) + \mathbf{1}_{[3,\infty)}(x).$

Задача 5

Случайная величина α равномерна на отрезке $[0, 1]$, случайная величина β независима с α .

- Найти функцию плотности распределения случайной величины $2\alpha - \beta$, если β распределена по показательному закону с параметром 1.
- Найти функцию распределения случайной величины $\alpha + \beta$, если β дискретна и распределена по пуссоновскому закону с параметром λ .
- Найти функцию распределения случайной величины $\alpha + 2\beta$, если β – геометрическая случайная величина с параметром p .

💡 Решение

- a. Пусть $\xi = 2\alpha - \beta$. Плотность 2α равна $f_{2\alpha}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}$. Плотность $-\beta$ равна $f_{-\beta}(x) = e^x \mathbf{1}_{(-\infty,0)}$. Плотность суммы ξ является свёрткой:

$$f_\xi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2\alpha}(x)f_{-\beta}(y-x) dx = \frac{\mathbf{1}_{(-\infty,2)}(y)}{2} \int_{\max(0,y)}^2 e^{y-x} dx = \begin{cases} \frac{e^y(1-e^{-2})}{2} & \text{если } y < 0, \\ \frac{1-e^{y-2}}{2} & \text{если } y \in [0, 2), \\ 0 & \text{если } y \geq 2. \end{cases}$$

- b. Пусть $\eta = \alpha + \beta$, тогда

$$F_\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\eta \leq x \mid \beta = k) \mathbb{P}(\beta = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\alpha \leq x-k) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} + (x - \lfloor x \rfloor) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}.$$

- c. Пусть $\zeta = \alpha + 2\beta$. $\mathbb{P}(\beta = k) = (1-p)^k p$ при $k = 0, 1, \dots$. Поэтому $F_\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\alpha \leq x - 2k)(1-p)^k p$. Аналогично пункту b, F_ζ кусочно-аффинна, интерполируя значения $F_{2\beta}(x)$ в чётных целых точках $x = 2k$.

Задача 6\$

Случайная величина γ распределена по показательному закону с параметром a , случайная величина θ также распределена по показательному закону с параметром b , при этом γ, θ независимы.

- a. Найти функцию плотности с.в. $\sqrt{\gamma}$.
- b. Найти функцию плотности с.в. γ^2 .
- c. Найти функцию плотности с.в. $1 - e^{-a\gamma}$.
- d. Найти функцию плотности с.в. $\max(\gamma, \theta)$.
- e. Найти функцию плотности с.в. $\min(\gamma, \theta)$.
- f. Найти функцию плотности с.в. $\gamma + \theta$.

💡 Решение

- a. $F(y) = \mathbb{P}(\gamma \leq y^2) = 1 - e^{-ay^2}$ при $y \geq 0$. $p(y) = 2aye^{-ay^2}$.
- b. $F(y) = \mathbb{P}(\gamma \leq \sqrt{y}) = 1 - e^{-a\sqrt{y}}$ при $y \geq 0$. $p(y) = \frac{a}{2\sqrt{y}} e^{-a\sqrt{y}}$.
- c. $\zeta = 1 - e^{-a\gamma} = F_\gamma(\gamma)$. Как известно, это преобразование даёт Uniform([0, 1]) для любой непрерывной случайной величины γ .
- d. $F_{\max}(x) = F_\gamma(x)F_\theta(x) = 1 - e^{-ax} - e^{-bx} + e^{-(a+b)x}$. $p_{\max}(x) = ae^{-ax} + be^{-bx} - (a+b)e^{-(a+b)x}$ при $x \geq 0$.
- e. $F_{\min}(x) = 1 - (1 - F_\gamma(x))(1 - F_\theta(x)) = 1 - e^{-(a+b)x}$. То есть минимум подчинён показательному распределению с параметром $a + b$.

f. Если $a \neq b$, $p_{\gamma+\theta}(y) = \frac{ab}{b-a}(e^{-ay} - e^{-by})$. Если $a = b$, $p_{\gamma+\theta}(y) = a^2ye^{-ay}$.

Задача 7*\$

Пусть X_1, X_2, \dots – независимые случайные величины, с одинаковым распределением $\exp(\lambda)$. Пусть $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ и $N_t := \inf\{n \geq 0 : Y_{n+1} > t\}$, $t > 0$.

- Докажите, что распределение Y имеет плотность $\rho_n(y) := e^{-\lambda y} \frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{y \geq 0}$.
- Докажите, что $\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$ (это означает, что $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$).

Решение

- Докажем индукцией.

- Для $n = 1$, $Y_1 = X_1$, поэтому $\rho_1(y) = \lambda e^{-\lambda y}$.
- Предположим формула верна для n . $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ – сумма независимых случайных величин, и плотность Y_{n+1} является свёрткой их плотностей:

$$\begin{aligned}\rho_{n+1}(y) &= \int_0^y \rho_n(x) \rho_1(y-x) dx = \int_0^y \left(e^{-\lambda x} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \right) (\lambda e^{-\lambda(y-x)}) dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} \int_0^y x^{n-1} dx = e^{-\lambda y} \frac{\lambda^{n+1} y^n}{n!}.\end{aligned}$$

- Заметим, что $\rho'_{n+1} = -\lambda(\rho_{n+1} - \rho_n)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(N_t < n+1) - \mathbb{P}(N_t < n) = \mathbb{P}(Y_{n+1} > t) - \mathbb{P}(Y_n > t) \\ &= \int_t^\infty (\rho_{n+1}(y) - \rho_n(y)) dy = - \int_t^\infty \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\lambda} \rho_{n+1}(y) \right) dy = \frac{1}{\lambda} \rho_{n+1}(t),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Задача 8\$

Точка (x, y) выбирается из квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ согласно равномерному распределению. Найдите распределение случайной величины

- x^2 .
- $x/(x+y)$.
- $x^2 + y^2$.
- $\min(x, y)$.
- $\max(x, y)$.

Решение

- Положим $\xi := x^2$. Тогда $F_\xi(z) = \mathbb{P}(x^2 \leq z) = \sqrt{z}$ и $f_\xi(z) = 1/(2\sqrt{z})$.
- Положим $\xi = x/(x+y)$. ξ имеет то же распределение, что и $1-\xi = y/(x+y)$. Поэтому плотность

удовлетворяет $f_\xi(z) = f_\xi(1-z)$. Рассмотрим $z \leq 1/2$ и заметим, что

$$\mathbb{P}(\xi \leq z) = \mathbb{P}(x \leq zy/(1-z)) = z/(2(1-z)),$$

поскольку это площадь треугольника с высотой 1 и основанием $z/(1-z)$. В частности, плотность равна $f_\xi(z) = 2(1+|2z-1|)^{-2}$ при $z \in [0, 1]$.

c. Положим $\xi = x^2 + y^2$. Для $z \in [0, 1]$

$$F_\xi(z) = \mathbb{P}(x^2 + y^2 \leq z) = \text{площадь четверти круга радиуса } \sqrt{z} = \pi z / 4.$$

Для $z \in (1, 2]$ множество $\{x^2 + y^2 \leq z\}$ является объединением двух треугольников и кругового сектора. Треугольники имеют высоту 1 и основание $\sqrt{z} \sin(\arccos z^{-1/2})$. Круговой сектор охватывает угол $\pi/2 - 2 \arccos(z^{-1/2})$. Поэтому при $z \in (1, 2]$

$$F_\xi(z) = \sqrt{z-1} + z(\pi/4 - \arccos z^{-1/2}).$$

В частности, $f_\xi(z) = \frac{\pi}{4} - \arccos(z^{-1/2}) \mathbf{1}_{[1,2]}(z)$.

d. Положим $\xi = \min(x, y)$. $F_\xi(z) = 1 - \mathbb{P}(\min(x, y) > z) = 1 - (1-z)^2 = 2z - z^2$ и $f_\xi(z) = 2(1-z)$.

e. Положим $\xi = \max(x, y)$. $F_\xi(z) = z^2$ и $f_\xi(z) = 2z$.

Задача 9\$

Пусть случайный вектор (α, β) равномерно распределён в области $\mathcal{G} := \{|x| + |y| < 1\}$. То есть соответствующая двумерная плотность распределения

$$f_{(\alpha, \beta)}(x, y) = \begin{cases} \text{const} & x, y \in \mathcal{G} \\ 0 & x, y \notin \mathcal{G} \end{cases}$$

- a. Чему равна константа в формуле?
- b. Найти плотности $f_\alpha(x), f_\beta(y)$ распределения первой α и второй β координат вектора.
- c. Зависимы ли α и β ?
- d. Найти плотности распределения для $\alpha + \beta$ и для $\alpha - \beta$.

Решение

- a. Константа равна $1/|\mathcal{G}| = 1/2$.
- b. Плотность α получается как образ равномерной меры на \mathcal{G} при проекции на отрезок $[-1, 1]$. Графическая визуализация сразу показывает $f_\alpha(x) = f_\beta(x) = (1 - |x|) \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Можно также вычислить напрямую $f_\alpha(x) = \int f_{\alpha, \beta}(x, y) dy$.
- c. Они зависимы, например, для $x \geq 1/2$ имеем $\mathbb{P}(\alpha > x, \beta > x) = 0$, в то время как $\mathbb{P}(\alpha > x) = \mathbb{P}(\beta > x) > 0$. Вообще, если (α, β) распределены как в условии, они независимы тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ (с точностью до множества меры нуль) и α, β равномерны на $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ соответственно.
- d. Пусть $U = \alpha + \beta, V = \alpha - \beta$. Это преобразование вращения и масштабирования. Область $|x| + |y| < 1$ переходит в область $\mathcal{G}' = \{|u| < 1, |v| < 1\}$. Якобиан преобразования из (u, v) в (x, y) равен

$1/2$, и поэтому (U, V) равномерно распределена на \mathcal{G}' . В частности, они независимы и одинаково распределены равномерно на $[-1, 1]$.

Задача 10\$

Пусть случайный вектор (α, β) равномерно распределён в верхнем полукруге $\mathcal{G} = \{x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$. То есть соответствующая двумерная плотность распределения

$$f_{(\alpha, \beta)}(x, y) = \begin{cases} \text{const} & x, y \in \mathcal{G} \\ 0 & x, y \notin \mathcal{G} \end{cases}$$

- a. Чему равна константа в формуле?
- b. Найти плотность $f_\alpha(x)$ — первой α координаты вектора.
- c. Найти плотность распределения для $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Нарисовать график $f_\rho(t)$.
- d. Найти плотность распределения для $\phi = \arccos(\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$. Нарисовать график $f_\phi(t)$.
- e. Зависимы ли ρ и ϕ ?
- f. Найти плотность распределения для $\xi = \alpha / \beta$. Нарисовать график $f_\xi(t)$.
- g. Найти плотность распределения для $\eta = \alpha^2 / \beta^2$. Нарисовать график $f_\eta(t)$.
- h. Найти плотность распределения для $\theta = \alpha^2 + \beta^2$. Нарисовать график $f_\theta(t)$.

Решение

- a. Константа равна $1/|\mathcal{G}| = 2/\pi$.
- b. Плотность α получается как образ равномерной меры на \mathcal{G} при проекции на отрезок $[-1, 1]$. Графическая визуализация сразу показывает $f_\alpha(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} \mathbf{1}_{[-1, 1]}$. Можно также вычислить напрямую $f_\alpha(x) = \int f_{\alpha, \beta}(x, y) dy$.
- c. ρ — полярный радиус. $F_\rho(r) = \mathbb{P}(\rho \leq r) = (\pi r^2 / 2) / (\pi / 2) = r^2$ при $r \in [0, 1]$. Поэтому $f_\rho(r) = 2r \mathbf{1}_{[0, 1]}$.
- d. ϕ — полярный угол. Он равномерно распределён на $[0, \pi]$.
- e. В полярных координатах совместная плотность равна $f(r, \phi) = (2/\pi) \cdot r$. Поэтому ρ и ϕ независимы.
- f. $\xi = \alpha / \beta = \cot(\phi)$. $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\cot \phi \leq x) = \mathbb{P}(\phi \geq \operatorname{arccot}(x)) = \frac{\pi - \operatorname{arccot}(x)}{\pi}$. $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (известно как распределение Коши).
- g. $\eta = \xi^2$. $F_\eta(y) = \mathbb{P}(\xi^2 \leq y) = F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y})$. $f_\eta(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1+y)}} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(y)$.
- h. $\theta = \rho^2$. $F_\theta(t) = \mathbb{P}(\rho^2 \leq t) = (\sqrt{t})^2 = t$ при $t \in [0, 1]$ (равномерное распределение).