Семинар 6

Задача 1

В коробке лежат 7 красных и 5 белых шаров. Случайным образом из коробки вынимают два шара. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа вынутых красных шаров. Изменится ли ответ, если вынимать шары следующим образом: вытащили первый шар, положили обратно, а затем вытащили второй шар?

Решение

Пусть N — количество вынутых красных шаров. Пусть $X_i = 1$, если i-й вынутый шар красный, и $X_i = 0$ в противном случае. $N = X_1 + X_2$. В обоих случаях имеем $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 7/12 = \mathbb{E}[X_2] = 7/12$, и, следовательно, $\mathbb{E}[N] = 7/6$. Однако вычисление дисперсии зависит от совместного распределения (X_1, X_2), и нам нужно рассмотреть два случая отдельно.

a. **Без возвращения:** В этом случае $\mathbb{P}(N = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \binom{7}{2}/\binom{12}{2}$; $\mathbb{P}(N = 0) = \binom{5}{2}/\binom{12}{2}$. Таким образом, мы можем вычислить

$$\mathbb{E}[N^2] = 4\mathbb{P}(N = 2) + 1(1 - \mathbb{P}(N = 2) - \mathbb{P}(N = 0)) = 1 + 3\frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} - \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}$$

$$\mathrm{Var}[N] = \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2 = \frac{175}{396} \approx 0.442$$

b. **С возвращением:** Теперь X_1, X_2 независимы, $N \sim \mathrm{Binomial}(2, p = 7/12)$. Следовательно, $\mathrm{Var}(N) = 2p(1-p) = 35/72 \approx 0.486$. Как и подсказывает интуиция, дисперсия увеличилась.

Задача 2

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Вычислите $\mathbb{E}[\xi^n]$ для $n \in \mathbb{N}$.

Решение

- Если n нечётно, то $\mathbb{E}[\xi^n] = 0$ в силу симметрии нормального распределения относительно нуля.
- Если $n = 2k$ чётно, мы можем свести задачу к случаю $\sigma = 1$, рассматривая $Z = \xi/\sigma$, поскольку тогда $\mathbb{E}[\xi^{2k}] = \sigma^{2k}\mathbb{E}[Z^{2k}]$. Интегрирование по частям демонстрирует ключевое свойство стандартных нормальных случайных величин:

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$$

Пусть $f(Z) = Z^{n-1}$. Тогда $\mathbb{E}[Z^n] = (n-1)\mathbb{E}[Z^{n-2}]$. Применяя эту формулу многократно: $\mathbb{E}[Z^{2k}] = (2k-1)\mathbb{E}[Z^{2k-2}] = (2k-1)(2k-3)\cdots 1 \cdot \mathbb{E}[Z^0] = (2k-1)!!$. Тогда $\mathbb{E}[\xi^{2k}] = \sigma^{2k}(2k-1)!!$.

Задача 3

Случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром λ_1, случайная величина η распределена экспоненциально с параметром λ_2, причем ξ и η независимы. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $\xi + \eta$, $\xi\eta$.

Решение

$\mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}[\xi] + \mathbb{E}[\eta] = \lambda_1 + 1/\lambda_2$, и в силу независимости

$$\begin{aligned} \mathtt{Var}(\xi + \eta) &= \mathtt{Var}(\xi) + \mathtt{Var}(\eta) = \lambda_1 + 1/\lambda_2^2 \\ \mathbb{E}[\xi\eta] &= \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}[\eta] = \lambda_1/\lambda_2 \\ \mathtt{Var}(\xi\eta) &= \mathbb{E}[\xi^2]\mathbb{E}[\eta^2] - (\mathbb{E}[\xi\eta])^2 = (\lambda_1 + \lambda_1^2)(2\lambda_2^{-2}) - (\lambda_1/\lambda_2)^2 \end{aligned}$$

Задача 4

Пусть плотность совместного распределения случайных величин ξ, η равна $p_{\xi,\eta}(x, y) = C\exp(-x^2 + 2xy - 2y^2)$. Найдите константу C и $\mathtt{Cov}(\xi, \eta)$.

Решение

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты: $-x^2 + 2xy - 2y^2 = -(x^2 - 2xy + y^2) - y^2 = -((x-y)^2 + y^2)$. С помощью замены $z = x - y$ в интеграле получаем $\int p_{\xi,\eta}(x, y)dx\,dy = C\pi$. Следовательно, $C = 1/\pi$.
Из того же вычисления видно, что $\zeta := \xi - \eta$ и η независимы, поэтому $\mathtt{Cov}(\xi, \eta) = \mathtt{Cov}(\zeta, \eta) - \mathtt{Cov}(\eta, \eta) = 0 + 1/2$.

Задача 5

Приведите пример зависимых случайных величин с нулевой ковариацией.

Решение

Пусть X — любая симметричная (не постоянная) случайная величина, то есть X и $-X$ имеют одинаковое распределение, например $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Возьмем $Y = X^{2n}$, тогда X и Y зависимы, $\mathbb{E}[X] = 0$ и $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$.

Задача 6

Вычислите $\mathbb{E}\xi^2$, если

a.
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ 1/3 & \text{при } -1 \le x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

b. А если $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$ при $x \ge 0$?

💡 Решение

Для $a \in \mathbb{R}$ имеем, что

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = f(a) + \int_a^{\infty} f'(t)\mathbb{P}(\xi > t)dt - \int_{-\infty}^{a} f'(t)\mathbb{P}(\xi \leq t)dt \tag{1}$$

a. Мы можем решить задачу двумя разными способами.

- Используя Уравнение 1 с $a = -1$:

$$\mathbb{E}\left[\xi^2\right] = (-1)^2 + \int_{-1}^{0} 2t(1 - 1/3)dt + \int_0^{\infty} 2t\tfrac{1}{2}e^{-t}dt = 1 - 2/3 + 1 = 4/3$$

- Используя тот факт, что распределение ξ равно $\mu_\xi = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{6}\delta_0 + \frac{1}{2}e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}dx$, так что

$$\mathbb{E}\left[\xi^2\right] = \int x^2 d\mu_\xi(x) = \tfrac{1}{3}(-1)^2 + \tfrac{1}{6}0^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} = 1/3 + 0 + 2/2 = 4/3$$

b. Это распределение Коши. Распределение ξ имеет плотность: $p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Таким образом, $x^2 p_\xi(x)$ не интегрируема и $\mathbb{E}[\xi^2] = +\infty$. Мы также можем проверить, что Уравнение 1 (скажем, при $a = 0$) дает тот же результат, так как

$$\mathbb{E}\left[\xi^2\right] = 0^2 + 2\int_0^{\infty} 2t(1/2 - \arctan(t))dt = +\infty$$

Задача 7

Пусть ξ распределена по закону Коши с плотностью $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Найдите квантиль $q_{2/3}$ для $|\xi|$.

💡 Решение

Нам нужно решить $\mathbb{P}(|\xi| \leq q) = 2/3$. Отсюда получаем

$$\frac{2}{3} = \int_{-q}^{q} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\arctan(q)$$

Следовательно, $q_{2/3} = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Задача 8

$n = 100$ писем случайным образом разложили по n конвертам, на которых уже были написаны адреса. Найдите математическое ожидание и дисперсию количества писем, попавших в конверты с правильными адресами.

Решение

Здесь мы считаем неподвижные точки в случайной перестановке. Пусть X — количество писем в правильных конвертах. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — индикатор того, что i-е письмо попало в свой конверт. Поскольку существует $(n-1)!$ перестановок, оставляющих точку i неподвижной,

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/n$$

Аналогично, для $i \neq j$ существует $(n-2)!$ перестановок, оставляющих неподвижными i, j:

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot (1/n) = 1 \\
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_{i} \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] = n \cdot (1/n) + n(n-1) \cdot 1/(n(n-1)) = 2 \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 2 - 1 - 1
\end{aligned}$$

Ответ не зависит от $n \geq 2$.

Задача 9

Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет равномерное распределение на n-мерной сфере радиуса 1. Найдите $\mathrm{Var}(\xi_j)$.

Решение

В силу симметрии $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$. Более того, каждое ξ_i имеет одинаковое распределение и $\sum_j \xi_j^2 = 1$. Следовательно, $\mathbb{E}[\xi_i^2] = \mathrm{Var}(\xi_j) = 1/n$.

Задача 10

За круглым столом сидят n мужчин и m женщин. Найдите матожидание и дисперсию числа пар соседей вида МЖ.

Решение

Пусть $X_i = 1$, если пара на местах $(i, i+1)$ (суммы понимаются по модулю $n+m$) имеет тип МЖ, и $X_i = 0$ иначе. Пусть $X = \sum_i X_i$ — количество пар соседей МЖ. Имеем

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = (m+n)\mathbb{P}(X_1 = 1) = (m+n)\frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{2nm}{n+m-1}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_{i,j\,:\,i=j} \mathbb{E}[X_i X_j] + \sum_{i,j\,:\,|i-j|=1} \mathbb{E}[X_i X_j] + \sum_{i,j\,:\,|i-j|>1} \mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X] + 2(n+m)\mathbb{P}(X_1 = 1, X$$

$$= \frac{2nm}{n+m-1} + 2(n+m)\frac{nm(n-1)+mn(m-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} + ((n+m)^2 - 3(n+m))\frac{4nm(n-1)(m}{(m+n-1)(m+}$$

$$\mathtt{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{4nm(n-1)(m-1)}{(n+m-1)^2(n+m-2)}$$

Действительно,

- Чтобы вычислить $\mathbb{P}(X_1 = 1)$, у нас могут быть пары МЖ или ЖМ, каждая с вероятностью $nm/((n+m)(n+m-1))$.
- Чтобы вычислить $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$, у нас могут быть МЖМ или ЖМЖ.
- Чтобы вычислить $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1)$, существует четыре расположения: МЖМЖ, МЖЖМ, ЖММЖ, ЖМЖМ.

Задача 11

Пусть η и $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины, принимающие значения $0, 1, 2, \ldots$, причем ξ_j имеют одинаковые распределения. Рассмотрим случайную величину $\beta = \sum_{j=1}^{\eta} \xi_j$. Докажите следующее соотношение между производящими функциями: $Q_\beta = Q_\eta \circ Q_\xi$.

Решение

Уславливаясь на η:

$$Q_\beta(s) := \mathbb{E}[s^\beta] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^\beta | \eta = k]\mathbb{P}(\eta = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^k \xi_j}]\mathbb{P}(\eta = k)$$

где на последнем шаге мы использовали, что $\sum_{j=1}^k \xi_j$ и η независимы. Поскольку (ξ_j) суть i.i.d., математическое ожидание произведения $\prod s^{\xi_j}$ распадается на множители, что дает

$$Q_\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}[s^{\xi_j}]\mathbb{P}(\eta = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\eta = k)\mathbb{E}[s^\xi]^k = Q_\eta(Q_\xi(s))$$

Задача 12

Задана бесконечная i.i.d. последовательность индикаторов (т.е. Бернулли) $\{\xi_i\}$, $i = 0, 1 \ldots$ с параметром $p = 1/3$, случайная величина β независима с этими индикаторами. Найдите $\mathbb{E}(\alpha)$ дискретной случайной величины $\alpha = \sum_{k=1}^{\beta} \xi_k$, если

a. $\beta \sim \text{Poisson}(1)$
b. $\beta \sim \text{Binomial}(3, 0.5)$
c. $\beta \sim \text{Geom}(0.5)$

> **Решение**
>
> Мы можем использовать предыдущую задачу, чтобы получить $Q_\alpha = Q_\beta \circ Q_\xi$. В частности, $\mathbb{E}[\alpha] = Q'_\alpha(1) = Q'_\beta(Q_\xi(1))Q'_\xi(1) = Q'_\beta(1)Q'_\xi(1) = \mathbb{E}[\beta]\mathbb{E}[\xi]$.

Задача 13

Два преподавателя читают теорию вероятностей. Первый уже знает, что в его классе n студентов. Другой, однако, еще не провел первое занятие, поэтому он считает, что количество N его студентов — случайная величина с матожиданием равным n.

Планируется провести экзамен, вероятность успешной сдачи которого равна $p \in (0, 1)$ для каждого студента (независимо от других студентов и от N). В каком классе наибольшее ожидаемое число тех студентов, которые успешно сдадут экзамен? В каком классе набольшая дисперсия числа студентов, которые сдадут экзамен?

> **Решение**
>
> Пусть Y — количество студентов, сдавших экзамен в первом классе, а X — во втором.
> $Y \sim \text{Binomial}(n, p)$. Следовательно, $\mathbb{E}[Y] = np$ и $\text{Var}(Y) = np(1-p)$.
> Для второго класса количество студентов N является случайной величиной с $\mathbb{E}[N] = n$. Однако мы знаем, что $\mathbb{P}(X = k|N = m) = \binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}$. А именно, X имеет биномиальное распределение *при условии* N. Из предыдущей задачи $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N]] = np$. Ожидаемое количество студентов, сдавших экзамен, одинаково в обоих классах.
> Дисперсию можно вычислить как:
>
> $$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|N])$$
>
> где $\text{Var}(X|N) = Np(1-p)$, поэтому первый член в правой части равен $np(1-p)$. $\mathbb{E}[X|N] = Np$, поэтому второй член равен $p^2 \text{Var}(N)$. В частности, $\text{Var}(X) = \text{Var}[Y] + p^2 \text{Var}[N]$. Дисперсия больше во втором классе.

Задача 14

Пусть случайная величина $\xi \in L_1(\Omega, \mathbb{P})$ такова, что

a. $\xi = 0, 1, \ldots$. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq n)$.
b. $\xi \geq 0$. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x)\, dx$. Кроме того, $\mathbb{E}\xi = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi > x)\, dx = \int_0^\infty (1 - F_\xi(x))\, dx$.

> **Решение**
>
> В общем случае имеем для $X \geq 0$, что $\xi = \int_0^\infty \mathbf{1}_{x<\xi} dx$, тогда по теореме Фубини
>
> $$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi > x) dx$$

Задача 15

У вас есть час на дневной сон, но вы ждете два сообщения и не отключаете телефон. От сообщений вы просыпаетесь. Считая, что времена прихода сообщений независимы и равномерно распределены в течение этого часа, сколько в среднем вам останется спать после их прихода?

Решение

Пусть час — это интервал $[0,1]$. Времена прихода сообщений $T_1, T_2 \sim \text{Uniform}([0,1])$ независимы. Вы проснетесь последний раз в момент $M = \max(T_1, T_2)$. Оставшееся время сна равно $1 - M$. Таким образом,

$$\mathbb{E}[1-M] = \int_0^1 \mathbb{P}(M \le t)dt = \int_0^1 \mathbb{P}(T_1 \le t)\mathbb{P}(T_2 \le t)dt = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$$

или 20 минут.

Задача 16

Пусть ξ - случайная величина. Докажите следующие утверждения.

a. Если $\xi \in L^1$, то медиана m минимизирует функцию $\phi_1(r) = \mathbb{E}[|\xi - r|]$.
b. Если $\xi \in L^2$, то математическое ожидание $\mathbb{E}[\xi]$ минимизирует функцию $\phi_2(r) = \mathbb{E}[|\xi - r|^2]$.
c. Используйте (a) и неравенство Йенсена, чтобы доказать, что $|m - \mathbb{E}[\xi]|^2 \le \text{Var}\,\xi$.

Решение

a. Пусть m — медиана и $r > m$. Тогда $\mathbb{E}[|\xi - r|] - \mathbb{E}[|\xi - m|] = \mathbb{E}[|\xi - r| - |\xi - m|]$. Подынтегральное выражение равно $r - m$ при $\xi \le m$, $m - r$ при $\xi > r$, и $m + r - 2\xi$ при $m < \xi \le r$. Таким образом,

$$\phi_1(r) - \phi(m) = \mathbb{E}[|\xi - r|] - \mathbb{E}[|\xi - m|] \ge (r-m)\mathbb{P}(\xi \le m) + (m-r)\mathbb{P}(\xi > r) + (m-r)\mathbb{P}(m < \xi \le r) = (r-m)(\mathbb{P}($$

Если $r < m$, то аналогичное вычисление, применённое к $-\xi$, дает схожий результат.

b. Пусть $\mu := \mathbb{E}[\xi]$. Тогда

$$\phi_2(r) = \mathbb{E}[(\xi - r)^2] = \mathbb{E}[(\xi - \mu)^2] + 2\mathbb{E}[(\xi - \mu)](r - \mu) + (r - \mu)^2 = \phi_2(\mu) + (r - \mu)^2$$

Таким образом, m является единственной точкой минимума для ϕ_2.

c. $|\mathbb{E}\xi - m| \le \mathbb{E}[|\xi - m|] \le \mathbb{E}[|\xi - \mathbb{E}[\xi]|]$ из пункта a. Следовательно,

$$|\mathbb{E}[\xi] - m|^2 \le \mathbb{E}[|\xi - \mathbb{E}[\xi]|]^2 \le \mathbb{E}[|\xi - \mathbb{E}[\xi]|^2] = \text{Var}(\xi).$$

Задача 17*

[в контексте этой задачи впервые в истории был применен метод Монте-Карло] На полосу бесконечной длины и единичной ширины на плоскости случайным образом бросают иглу единичной длины. Какова вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну из линий, образующих полосу?

Указание: Замените задачу следующим более общим вопросом: вместо иглы рассмотрим произвольную липшицеву кривую длины ℓ. Найдите матожидание числа ее пересечений с бесконечной решеткой, образованной параллельными линиями с шагом 1. Начните с кривой в форме отрезка.

Решение

С вероятностью 1 игла не может пересечь более одной линии. Поэтому вероятность пересечения — это просто математическое ожидание числа пересечений.
Рассмотрим отрезок длины ℓ, разобьем его на конечное число интервалов, и пусть X_i — количество пересечений интервала i с вертикальными линиями на плоскости. Количество пересечений $X = \sum_i X_i$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] \tag{2}$$

следовательно, $\mathbb{E}[X]$ — это просто линейная функция от ℓ. Нам нужно выяснить коэффициент пропорциональности. Рассмотрим теперь конечное объединение отрезков. Мы можем рассуждать так же, и количество пересечений будет пропорционально суммарной длине отрезков.
Поскольку мы берем кусочно-линейную кривую для аппроксимации гладкой кривой, например окружности, мы видим, что количество пересечений аппроксимаций сходится п.н. к количеству пересечений кривой (которое, например, для окружности ограничено). Таким образом, для гладкой кривой $\mathcal{C}$ количество пересечений $X_{\mathcal{C}}$ удовлетворяет

$$\mathbb{E}[X_{\mathcal{C}}] = A\ell(\mathcal{C})$$

где A — константа, не зависящая от кривой $\mathcal{C}$, а $\ell(\mathcal{C})$ — длина кривой. Чтобы определить A, заметим, что окружность диаметра 1 имеет п.н. 2 пересечения с вертикальными линиями. Следовательно, $2 = A\pi$. Таким образом, для гладкой (или спрямляемой) кривой

$$\mathbb{E}[X_{\mathcal{C}}] = 2\ell(\mathcal{C})/\pi$$

Задача 18*

Пусть $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность длины 1. Для $E \subset S^1$ и $x \in S^1$ положим $x + E := \{x + y \,:\, y \in E\}$. Пусть множество E измеримо и $n≥1 $. Докажите, что существуют $x_1, \dots, x_n \in S^1$ такие, что $|\cup_{i=1}^n (x_i + E)| \geq 1 - (1 - |E|)^n$. Пример: для $E = [0, 1/n]$ можно выбрать $x_1 = 0$, $x_2 = 1/n$, $x_3 = 2/n$ и т.д., тогда искомое объединение $\cup_{i=1}^n (x_i + E)$ совпадает с S^1 и его мера равна 1.

Решение

Выберем $x_1, \dots, x_n$ независимо с равномерным распределением на S^1. По теореме Фубини:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\cup_{i=1}^n (x_i + E)|] &= \int_{S^1} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\cup_i (x_i+E)}(y)]dy \\
&= \int_{S^1} (1 - \mathbb{P}(\cap_i \{y \notin x_i + E\}))\, dy = 1 - \int_{S^1} \mathbb{P}(\cap_i \{x_i \notin y - E\})dy \\
&= 1 - \int_{S^1} \prod_i \mathbb{P}(x_i \notin y - E)dy = 1 - (1 - |E|)^n
\end{aligned}$$

Поскольку среднее значение меры объединения равно $1 - (1 - |E|)^n$, должно существовать по крайней мере одно конкретное расположение $(x_1, \dots, x_n)$, для которого мера объединения не меньше этого среднего значения.

Задача 19*

Найдите матожидание и дисперсию $\max(\xi, \eta)$, где ξ, η — случайные величины из задачи (3).

Решение

Поскольку ξ, η независимы,

$$\mathbb{E}[\max(\xi, \eta)] = \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(\max(\xi, \eta) \le t)dt = \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(\xi \le t)\mathbb{P}(\eta \le t)dt$$

Дисперсию мы можем вычислить как $\mathrm{Var}(\max(\xi, \eta)) = \mathbb{E}[\max(\xi, \eta)^2] - \mathbb{E}[\max(\xi, \eta)]^2$. Так что нам остаётся вычислить

$$\mathbb{E}[\max(\xi, \eta)^2] = \int_0^\infty 2t(1 - \mathbb{P}(\xi \le t)\mathbb{P}(\eta \le t))dt$$

Задача 20*

[обобщение задачи 14] Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, ξ — случайная величина и $f(\xi) \in L_1$. Докажите, что $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}f(\xi) = f(a) + \int_a^\infty f'(x)\mathbb{P}(\xi \ge x)\, dx - \int_{-\infty}^a f'(x)\mathbb{P}(\xi \ge x)\, dx$$

Решение

Мы можем ограничиться случаем $a = 0$ и $f(0) = 0$, рассматривая в противном случае функцию $f(\cdot + a) - f(a)$. Давайте также рассмотрим случай $\xi \ge 0$, общий случай аналогичен. Тогда по теореме Фубини

$$f(\xi) = \int_0^\xi f'(t)dt = \int_0^\infty f'(t)\mathbf{1}_{0 \le t \le \xi}dt$$
$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \int_0^\infty f'(t)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{0 \le t \le \xi}]dt$$

что и дает заявленную формулу.

Задача 21*

Пусть E — упорядоченное измеримое пространство. Пусть $\xi\colon \Omega \to E$ — случайная величина. Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ — измеримые монотонные функции. Докажите, что

$$\mathbb{E}[f(\xi)\, g(\xi)] \ge \mathbb{E}[f(\xi)]\mathbb{E}[g(\xi)].$$

Решение

Возьмем i.i.d. X, Y. Тогда, так как $(f(y) - f(x))(g(y) - g(x))$ поточечно неотрицательно,

$$0 \le \mathbb{E}[(f(Y) - f(X))(g(Y) - g(X))] = \mathbb{E}[f(X)g(X) + f(Y)g(Y)] - \mathbb{E}[f(X)g(Y) + f(Y)g(X)]$$

Поскольку X, Y суть i.i.d., это дает искомое неравенство.

Задача 22*

Пусть случайные величины ξ, η удовлетворяют $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, а $\operatorname{Var}\xi = \operatorname{Var}\eta = 1$ и имеют коэффициент корреляции ρ. Докажите, что

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) \leq 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

Решение

Для $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$. Таким образом:

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\xi^2+\eta^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[|\xi^2-\eta^2|] = \frac{1}{2}\operatorname{Var}[\xi] + \frac{1}{2}\operatorname{Var}[\eta] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[|\xi+\eta||\xi-\eta|]$$

Кроме того, мы имеем $\mathbb{E}[\xi\eta] = \rho\sqrt{\operatorname{Var}[\xi]\operatorname{Var}[\eta]}$, и

$$\mathbb{E}[|\xi+\eta||\xi-\eta|] \leq \mathbb{E}[(\xi+\eta)^2]^{1/2}\mathbb{E}[(\xi-\eta)^2]^{1/2}$$

Объединяя всё вместе:

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) \leq \frac{\operatorname{Var}[\xi] + \operatorname{Var}[\eta]}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\operatorname{Var}[\xi] + \operatorname{Var}[\eta])^2 - 4\rho^2 \operatorname{Var}[\xi]\operatorname{Var}[\eta]}$$

Задача 23*

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — iid, $\xi_j \sim \operatorname{Uniform}([0,1])$. Пусть ν — случайная величина, равное минимальному k, при котором $\sum_{i=1}^{k} \xi_i \geq 1$. Найдите $\mathbb{E}[\nu]$.

Решение

Для $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ выполняется $\{\nu > n\} = \{S_n < 1\}$. Таким образом,

$$\mathbb{E}[\nu] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\nu > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n < 1)$$

Плотность S_n на $[0,1]$ равна $x^{n-1}/(n-1)!$. Следовательно,

$$\mathbb{E}[\nu] = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx = e$$

Дополнительные Задачи

Задача 24*

Пусть ξ — случайная величина, а $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна и такова, что $\mathbb{E}[|f(\xi)|] < \infty$. Докажите, что для $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = f(a) + \int_a^{\infty} f'(t)\mathbb{P}(\xi > t)dt - \int_{-\infty}^{a} f'(t)\mathbb{P}(\xi \le t)dt$$

В частности, если f имеет предел на $-\infty$,

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = f(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\mathbb{P}(\xi > t)dt \tag{3}$$

> **Решение**
>
> Поскольку f абсолютно непрерывна, для ω таких, что $\xi(\omega) \ge a$ (заметим, что по крайней мере один из интегральных членов обращается в ноль для каждого ω, в зависимости от того, $\xi(\omega) > a$ или $\xi(\omega) < a$):
>
> $$f(\xi) = f(a) + \int_a^{\infty} \mathbf{1}_{\xi > t} f'(t)dt - \int_{-\infty}^{a} \mathbf{1}_{\xi \le t} f'(t)dt$$
>
> Внося математическое ожидание под знак интеграла, получаем искомую формулу.

Задача 25*

Пусть ξ — случайная величина и $\varepsilon \in (0, 1]$. Определим

$$\varphi(t) := -\log \mathbb{P}(\xi > t) \in [0, +\infty]$$
$$\psi(t) := -\log \mathbb{P}(\xi \ge t) \in [0, +\infty]$$

Докажите, что

$$\mathbb{E}[e^{(1-\varepsilon)\psi(\xi)}] \le \varepsilon^{-1} \le \mathbb{E}[e^{(1-\varepsilon)\varphi(\xi)}]$$

В частности, достигается равенство, если $\mathbb{P}(\xi = t) = 0$ для всех t.

> **Решение**
>
> Сначала возьмем абсолютно непрерывную, неубывающую функцию $\chi \ge \varphi$. Используя Уравнение 3,
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{(1-\varepsilon)\chi(\xi)}] &= 1 + \int_0^{\infty} (1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)\chi(t)}\chi'(t)\mathbb{P}(\xi > t)dt \ge 1 + \int_0^{\infty} (1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)\chi(t)}\chi'(t)e^{-\chi(t)}dt \\ &= 1 + (1-\varepsilon)\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\chi(t)}\chi'(t)dt = 1 + (1-\varepsilon)/\varepsilon = 1/\varepsilon\end{aligned}$$
>
> И аналогично, если мы рассмотрим $\chi \le \psi$. Следовательно,
>
> $$\sup_{\chi \le \psi, \chi \text{a.c.}} \mathbb{E}[e^{(1-\varepsilon)\chi(\xi)}] \le \varepsilon^{-1} \le \sup_{\chi \ge \varphi, \chi \text{a.c.}} \mathbb{E}[e^{(1-\varepsilon)\chi(\xi)}]$$

Теперь суть в том, что мы можем аппроксимировать φ гладкими функциями сверху, а ψ — снизу. Например, возьмем η_n с гладкой плотностью, сосредоточенной в $[0, 1/n]$, и независимую от ξ. Затем положим

$$\varphi_n(t) := -\log \mathbb{P}(\xi + \eta_n > t) \in [\varphi(t - 1/n), \psi(t)], \qquad \psi_n(t) := -\log \mathbb{P}(\xi - \eta_n \geq t) \in [\varphi(t), \psi(t + 1/n)]$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$.