Семинар 7

*Во всех задачах, где требуется оценить вероятность, **нужно оценить и точность** приближения.*

Задача 1

В институте обучается 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0.1. Оцените вероятность того, что в обычный учебный день:

a. столовая будет заполнена не более чем на две трети;
b. посадочных мест на всех не хватит.

Задача 2

В среднем число инфицированных вирусом гриппа при эпидемии составляет 25%, то есть в организации из 600 человек можно предполагать в среднем 150 инфицированных. Указать значение a такое, что с вероятностью 0.9 число инфицированных в этой организации будет от 150-a до 150+a. Полученный интервал называется *доверительным интервалом*.

Задача 3 [H]

В среднем число инфицированных вирусом гриппа при эпидемии составляет 20%, но в конкретном случае опросив N жителей можно узнать относительную частоту заражений. Какое наименьшее число N людей следует опросить, чтобы с вероятностью 0.95 утверждать, что зафиксированная частота заражений, отличается от предполагаемой величины 0.2 менее, чем на 0.05? Как можно объяснить ситуацию, если наблюденная при таком N частота окажется, например, равной 0.1?

Задача 4

В производстве однотипных деталей брак возникает с вероятностью $p = 10^{-4}$, оценить вероятность, что в партии из 500 деталей более одной бракованной.

Задача 5

В производстве однотипных деталей на китайском заводе однотипных деталей брак возникает с вероятностью $p = 3 \cdot 10^{-4}$, в производстве тех же деталей на индийском заводе брак возникает с вероятностью $p = 2 \cdot 10^{-4}$. Поставку из Китая в 100 деталей объединили с поставкой из Индии в 200 деталей, оценить вероятность, что в возникшей поставке из 300 деталей нет ни одной бракованной.

Задача 6

В колл-центр звонят в среднем раз в пять минут, оценить вероятность того, что за 10 минут позвонят ровно три раза.

Задача 7

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, для которой выполняется ЗБЧ:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad \lim_n \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Верно ли, что ЗБЧ обязан выполняться и для последовательности $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots |$?

Задача 8* [Теорема Бернштейна]

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют равномерно ограниченные дисперсии, причем $\mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) \to 0$ равномерно при $|i - j| \to \infty$. Докажите, что эта последовательность удовлетворяет ЗБЧ.

Задача 9

Покажите, что в законе больших чисел нельзя выкинуть условие независимости.

Задача 10

Покажите, что в центральной предельной теореме нельзя выкинуть условие независимости.