Неравенства Белла и границы применимости вероятностных моделей

Интереснейшими примерами попыток использования традиционной колмогоровской вероятностной модели в микромире служат толкования опыта Штерна-Герлаха по отклонению пучка частиц в магнитном поле и опыта Алана Аспекта по интерференции состояний фотонов (опыта, изначально предложенного еще в 30-х годах в статье Эйнштейна-Подольского-Розена). В 1964 году появился сравнительно несложный результат в теории вероятностей, который показал несовместность традиционных вероятностных моделей и количественных измерений в этих опытах. Этот результат называется *неравенствами Белла для случайных величин*, подробное объяснение связи неравенств с физическими измерениями можно найти в учебнике Александра Львовского ''Отличная квантовая механика'' 2019 года. Ниже изложено доказательство (принадлежащее Аккарди) неравенств Белла для случайных величин.

Примечание. Оригинальное доказательство Белла и почти все опубликованные позже доказательства неравенства Белла используют лишь случайные величины, принимающие только два значения $+1$ и -1.

Арифметические неравенства

Лемма 0.1. *Для любых двух чисел $a, c \in [-1, 1]$ справедливы следующие два (вариант для знаков $+$ и $-$) неравенства:*

$$|a \pm c| \leqslant 1 \pm ac \tag{1}$$

Более того, равенство в выражении Уравнение 1 выполняется тогда и только тогда, когда либо $a = \pm 1$, либо $c = \pm 1$.

Лемма 0.1. Два варианта неравенств Уравнение 1 следуют из того, что одно получается из другого заменой знака c, поскольку c выбрано произвольно в $[-1, 1]$. Так как для любых $a, c \in [-1, 1]$, то $1 \pm ac \geqslant 0$, то Уравнение 1 эквивалентно $|a \pm c|^2 = a^2 + c^2 \pm 2ac \leqslant (1 \pm ac)^2 = 1 + a^2c^2 \pm 2ac$, а это эквивалентно неравенству $a^2(1-c^2)+c^2 \leqslant 1$, которое тождественно выполняется, поскольку $1-c^2 \geqslant 0$, и, следовательно,

$$a^2(1 - c^2) + c^2 \leqslant 1 - c^2 + c^2 = 1 \tag{2}$$

Обратите внимание, что в выражении Уравнение 2 равенство выполняется тогда и только тогда, когда $a = \pm 1$ или $c = \pm 1$. Поскольку при замене a и c в выражении Уравнение 1 неравенство остаётся неизменным, тезис следует. □

Следствие 0.1. *Для любых трёх чисел $a, b, c \in [-1, 1]$ справедливы следующие эквивалентные (для вариантов знака $+$ и $-$) неравенства:*

$$|ab \pm cb| \leqslant 1 \pm ac \tag{3}$$

и равенство выполняется тогда и только тогда, когда $b = \pm 1$ и либо $a = \pm 1$, либо $c = \pm 1$.

Следствие 0.1. Для $b \in [-1, 1]$,

$$|ab \pm cb| = |b| \cdot |a \pm c| \leqslant |a \pm c|$$

Таким образом, утверждение следует из Лемма 0.1, а первое равенство выполняется тогда и только тогда, когда $b = \pm 1$, поэтому второе утверждение также следует из Лемма 0.1. □

Лемма 0.2. *Для любых чисел $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c \in [-1, 1]$, имеем*

$$|ab - cb| + |a\tilde{b} + c\tilde{b}| \leqslant 2 \tag{4}$$

$$ab + a\tilde{b} + \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{a}b \leqslant 2 \tag{5}$$

Первая формула верна тогда и только тогда, когда $b, \tilde{b}, a, c = \pm 1$.

Лемма 0.2. Из неравенства Уравнение 3

$$|ab - cb| \leqslant 1 - ac \tag{6}$$

$$|a\tilde{b} + c\tilde{b}| \leqslant 1 + ac \tag{7}$$

Складывая их, получаем выражение Уравнение 4. Левая часть выражения Уравнение 5 меньше или равна

$$|ab - b\tilde{a}| + |a\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{a}|$$

и заменой $\tilde{a}$ на c, выражение Уравнение 7 становится левой частью выражения Уравнение 4. Если $b, \tilde{b} = \pm 1$ и $a = \pm 1$, то равенство выполняется в выражении Уравнение 6, а следовательно, и в выражении Уравнение 7. Наоборот, предположим, что равенство выполняется в выражении Уравнение 4, и предположим, что либо $|b| < 1$, либо $|\tilde{b}| < 1$. Тогда приходим к противоречию.

$$2 = |b| \cdot |a - c| + |\tilde{b}| \cdot |a + c| < |a - c| + |a + c| \leqslant (1 - ac) + (1 + ac) = 2$$

Итак, если в выражении Уравнение 4 выполняется равенство, то должно быть $|b| = |\tilde{b}| = 1$. В этом случае выражение Уравнение 4 принимает вид

$$|a - c| + |a + c| = 2$$

и, если либо $|a| < 1$, либо $|c| < 1$, то из Лемма 0.1 следует, что $|a - c| + |a + c| < (1 - ac) + (1 + ac) = 2$ поэтому также должно быть $a, c = \pm 1$. □

Следствие 0.2. *Если $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c \in \{-1, 1\}$, то неравенства выражения Уравнение 3 и выражения Уравнение 4 эквивалентны, во всех них выполняется равенство. Однако неравенство в выражении Уравнение 5 может быть строгим.*

Следствие 0.2. Мы знаем, что неравенства в выражениях Уравнение 1 и Уравнение 2 эквивалентны, также из выражения Уравнение 1 следует Уравнение 4. Выбрав $\tilde{b} = a$ в выражении Уравнение 4, поскольку $a = \pm 1$, выражение Уравнение 4 примет вид $|ab - cb| \leqslant 1 - ac$, что эквивалентно $a(b + \tilde{b}) + \tilde{a}(\tilde{b} - b) \leqslant 2$.

В наших предположениях либо $(b + \tilde{b})$, либо $(\tilde{b} - b)$ равно нулю, поэтому неравенство $a(b + \tilde{b}) + \tilde{a}(\tilde{b} - b) \leqslant 2$ (см. Уравнение 5) эквивалентно либо $a(b + \tilde{b}) \leqslant 2$ либо $\tilde{a}(\tilde{b} - b) \leqslant 2$ и в обоих случаях мы можем выбрать $a, b, \tilde{b}$ или $\tilde{a}, b, \tilde{b}$ так, чтобы произведение было отрицательным, а неравенство — строгим. □

Неравенства Белла для случайных величин

Теорема 0.1 (Теорема Белла)**.** *Пусть* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ *— случайный вектор с компонентами по модулю не превосходящими* 1*. Тогда справедливы три неравенства*

$$\mathbb{E}\Big[|\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_3|\Big] \leqslant 1 - \mathbb{E}[\xi_1\xi_3]$$
$$\mathbb{E}\Big[|\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3|\Big] \leqslant 1 + \mathbb{E}[\xi_1\xi_3]$$
$$\mathbb{E}\Big[|\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_3|\Big] + \mathbb{E}\Big[|\xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4|\Big] \leqslant 2,$$

причём первое и второе неравенства эквивалентны. Если же ξ_1 *или* ξ_3 *дискретные со значениями* ± 1*, то все три неравенства эквивалентны.*

Теорема 0.1. На вероятностном пространстве Ω случайного вектора используем полученные выше арифметические неравенства поточечно вместе с $|E(\alpha)| \leqslant E(|\alpha|)$. □